2. ДІЕЛЕКТРИКИ ТА ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

2.1. Питання теми

1. Поляризація діелектриків та електричне поле всередині діелектриків.
2. Властивості провідників в електричному полі.
3. Електроємність.
4. Енергія електричного поля.

2.2. Основні визначення та формули

1. Основною характеристикою поляризації діелектрика в електричному полі є вектор поляризації

$$\vec{\mathrm{P}} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}, \tag{2.1}$$

де $\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_i$ – сумарний дипольний момент всіх молекул в об'ємі ΔV.
ΔV – фізично безмежно малий об'єм, тобто об'єм, достатньо малий, щоб в його межах можна було вважати постійним макроскопічні величини (наприклад: напруженість поля, густину, температуру та інше), а з другої сторони повинен містити достатньо велику для усереднення кількість молекул.

2. Потік вектора поляризації $\vec{P}$ через замкнуту поверхню $\vec{S}$:

$$\oint\limits_S \vec{P} d\vec{S} = -q' \tag{2.2}$$

де q' – алгебраїчна сума зв'язаних (поляризаційних) зарядів всередині цієї поверхні, а

$$div\vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\rho', \tag{2.3}$$

де ρ' – об'ємна густина зв'язаних зарядів.

3. Поверхнева густина зв'язаних (поляризаційних зарядів) σ' на межі діелектрик – вакуум дорівнює проекції вектора $\vec{P}$ на нормаль $\vec{n}$ до поверхні діелектрика ($\vec{n}$ направлений назовні діелектрика):

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n. \tag{2.4}$$

4. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектриках

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i, \tag{2.5}$$

де $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ – вектор електричного зміщення (індукції), $\vec{E}$ – напруженість електричного поля всередині діелектрика, $\sum q_i$ – алгебраїчна сума сторонніх (вільних) зарядів всередині замкнутої поверхні S.

5. Для ізотропного діелектрика

$$\vec{P} = æ\,\varepsilon_0 \vec{E},\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E},\ \varepsilon = 1 + æ, \tag{2.6}$$

де æ – діелектрична сприйнятливість, а ε – відносна діелектрична проникність діелектрика.

6. На границі розділу двох діелектриків у випадку відсутності сторонніх (вільних) зарядів мають місце співвідношення:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',\ D_{1n} = D_{2n},\ E_{1\tau} = E_{2\tau}, \tag{2.7}$$

де σ' – поверхнева густина зв'язаних зарядів, орт нормалі $\vec{n}$ направлений із середовища 1 в середовище 2, D_n, E_τ – нормальна і тангенційна складові векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ відповідно.

7. Для випадку ізотропного однорідного діелектрика, який заповнює весь простір між еквіпотенціальними поверхнями:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon, \tag{2.8}$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля всередині діелектрика, $\vec{E}_0$ – напруженість поля зовні діелектрика, ε – відносна діелектрична проникність діелектрика.

8. Напруженість електричного поля біля поверхні провідника у вакуумі:

$$E_n = \sigma / \varepsilon_0, \tag{2.9}$$

де σ – густина зарядів поверхні провідника.

9. При умові рівноваги надлишкові заряди в провіднику розподіляються по поверхні таким чином, щоб потенціал поверхні був однаковим, а напруженість поля всередині провідника дорівнювала нулю.

10. Ємність провідника

$$C = q / \varphi, \tag{2.10}$$

де q – надлишковий заряд на провіднику, φ – потенціал провідника.

11. Ємність

а) провідної кулі:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R, \tag{2.11}$$

де R – радіус кулі, ε – діелектрична проникність середовища, що оточує кулю;

б) плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{2.12}$$

де S – площа поверхні пластин, d – відстань між пластинами, ε – діелектрична проникність діелектрика, що повністю заповнює простір між пластинами;

в) циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0\ell}{\ln(R_2 / R_1)}, \tag{2.13}$$

де ℓ – довжина циліндричних електродів, R_1 – радіус внутрішнього, а R_2 радіус зовнішнього циліндрів, ε – діелектрична проникність діелектрика між циліндрами;

г) сферичного конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1), \tag{2.14}$$

де R_1 – радіус внутрішньої, R_2 – радіус зовнішньої сфери, ε – діелектрична проникність діелектрика, що повністю заповнює простір між концентричними сферами.

12. Об’ємна густина енергії електричного поля (енергія одиниці об’єму):

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{2.15}$$

13. Загальна формула для енергії електричного поля:

$$W = \int_V \omega dV, \tag{2.16}$$

де V – об’єм, в якому існує електричне поле, ω – об’ємна густина енергії поля.

14. Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \tag{2.17}$$

де U – різниця потенціалів між обкладинками конденсатора, C – ємність конденсатора, q – заряд пластини конденсатора.

2.3. Питання на самопідготовку

1. Вектор поляризації та його фізичний зміст.

2. Яким чином можна визначити поляризаційні(зв'язані) заряди за допомогою вектора поляризації?

3. Вектор електричного зміщення (індукції) та його фізичний зміст.

4. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектриках.

5. Зв'язок між векторами електричного зміщення та вектором напруженості електричного поля.

6. Електричне поле на межі двох діелектриків.

7. Основні властивості провідників в електричному полі.

8. Напруженість електричного поля біля поверхні зарядженого провідника.

9. Які властивості провідника дають можливість ввести поняття його ємності?

10. Конденсатори. Їх властивості та вимоги до конструкцій. Типи конденсаторів.

11. Енергія зарядженого провідника та конденсатора.

12. Об'ємна густина енергії електричного поля та загальна формула для розрахунку енергії.

2.4. Методичні вказівки

При розрахунку електричного поля в діелектриках доцільно використовувати наступні два методи.

Перший метод базується на принципі суперпозиції полів:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' ,$$

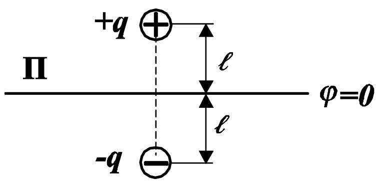
де $\vec{E}$ – напруженість поля в діелектрику, $\vec{E}_0$ – напруженість поля вільних (сторонніх) зарядів, $\vec{E}'$ – напруженість поля зв’язаних (поляризаційних) зарядів. Спочатку розраховують поле вільних (сторонніх) зарядів $\vec{E}_0$, потім визначають поле зв’язаних зарядів $\vec{E}'$. Тоді знаходять напруженість $\vec{E}$ поля в діелектрику. Таким же чином можна отримати вираз для потенціалу φ поля в діелектрику. Зауважимо, що не все так просто в цій методиці, як може здаватися на перший погляд. Нерідко приходиться застосовувати метод диференціювання і інтегрування, зустрічаються труднощі при визначені густини зв’язаних зарядів σ' і їх напружeності $\vec{E}'$ і т.п.

Другий метод базується на теоремі Остроградського-Гаусса (2.5). Спочатку за допомогою (2.5) знаходять вектор електричного зміщення $\vec{D}$, потім за формулою (2.6) визначають напруженість електричного поля $\vec{E}$ в діелектрику і далі (якщо необхідно) із співвідношень (1.16), (1.17) розраховують потенціал φ. Цим методом часто простіше досягнути цілі, ніж методом суперпозиції. Проте в деяких випадках другий метод застосовувати неможливо і використовують метод суперпозиції.

Електричне поле, яке створюється зарядженими провідниками.

Складність розрахунку напруженостей і потенціалів полів, які створюються в присутності провідників або самими зарядженими провідниками обумовлена тим, що розподіл зарядів на провідниках, як наданих їм, так і індукованих, наперед не відомий. Відомо тільки, що заряди ці розподіляються по поверхні так, що в всередині металу (в умовах електростатичної рівноваги) напруженість поля тотожно дорівнює нулеві. Ця умова разом з наслідками із неї дозволяє в деяких випадках знайти розподіл індукованих і наданих провідникам зарядів простими в математичному відношенні методами.

Наприклад. Так, як напруженість поля всередині провідника дорівнює нулеві, то поверхня провідника є еквіпотенціальною. На цій властивості провідника базується метод дзеркальних зображень. Суть його в наступному. Якщо в довільному електростатичному полі замінити еквіпотенціальну поверхню металічною поверхнею такої ж форми і створити на ній такий же потенціал, то дане електростатичне поле не зміниться. Наприклад, розглянемо електричне поле між точковим зарядом $+q$ і безмежною металічною площиною П, потенціал якої дорівнює нулю. Згідно методу дзеркальних зображень це поле еквівалентне електричному полю, що створюється даним точковим зарядом $+q$ і точковим зарядом $-q$, який є дзеркальним зображенням даного заряду $+q$ в металічній площині (див. рисунок).



2.5. Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Два безмежно довгих тонкостінних коаксіальних циліндри, радіуси яких R_1 = 2 см і R_2 = 4 см рівномірно заряджені з поверхневими густинами заряду σ_1 = + 5 нКл/м^2 і σ_2 = – 10 нКл/м^2. Простір між циліндрами заповнений парафіном (ε = 2). Визначити напруженість E електричного поля в точках, які знаходяться на відстанях r_1 = 1 см, r_2 = 3 см і r_3 = 6 см від осі циліндрів, тобто в точках A, B і C відповідно (рис.2.1).

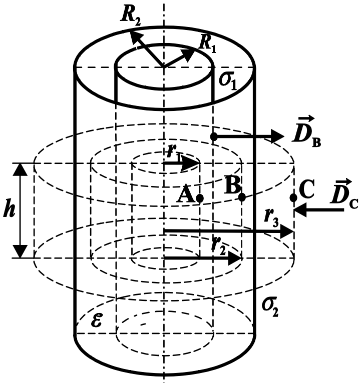


Рис. 2.1

Розв'язок. Застосуємо теорему Остроградського-Гаусса (2.5). Електричне поле, яке створюється зарядженими циліндрами має циліндричну симетрію, тобто вектори зміщення $\vec{D}_B$ і $\vec{D}_C$ є перпендикулярні до поверхні циліндрів. За замкнуту поверхню S вибираємо коаксіальні циліндри, висота яких h , а бічні поверхні проходять через точки A, B, C відповідно (рис. 2.1). За теоремою (2.5) циліндр, на бічній поверхні, якого знаходиться точка A не охоплює зарядів, тому індукція поля на відстані r_1 = 1 см дорівнює нулю. Тобто D_A= 0 і E_A= 0. Для точки B теорема (2.5) запишеться так:

$$D_B \cdot 2\pi r_2 h = 2\pi R_1 \cdot h\sigma_1 .$$

Звідки

$$D_B = \frac{R_1\sigma_1}{r_2}. \qquad (1)$$

З урахуванням (2.6) $D_B = \varepsilon\varepsilon_0 E_B$ і

$$E_B = \frac{R_1\sigma_1}{\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{2\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{-2}} \text{ В/м} = 188 \text{ В/м}.$$

Аналогічно для точки С запишемо: $D_C \cdot 2\pi r_3 h = 2\pi R_1 \sigma_1 h + 2\pi R_2 \sigma_2 h.$
Звідки

$$D_C = \frac{R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2}{r_3},$$

або з урахуванням (2.6)

$$E_C = \frac{R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2}{\varepsilon_0 r_3} =$$

$$= \frac{2\cdot10^{-2}\cdot5\cdot10^{-9} - 4\cdot10^{-2}\cdot10\cdot10^{-9}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot6\cdot10^{-2}}\ \text{В/м} = -565\ \text{В/м}.$$

Знак «мінус» означає, що вектор $\vec{E}_c$ направлений до циліндрів, протилежно вектору $\vec{E}_B$.

Задача 2.2. Плоский шар із діелектрика з діелектричною проникністю ε рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho > 0$ (рис. 2.2.) Товщина шару ℓ. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів, різницю потенціалів між серединою шару і його поверхнею, між поверхнею і точкою, яка лежить на відстані ℓ від середини шару. Побудувати графіки залежності $D_x(x)$, $E_x(x)$, $P_x(x)$, ($\vec{P}$ – вектор поляризації) і $\varphi(x)$, де x – відстань по перпендикуляру до шару від його середини до точки, що розглядається. Вважати, що лінійні розміри шару значно більші його товщини.

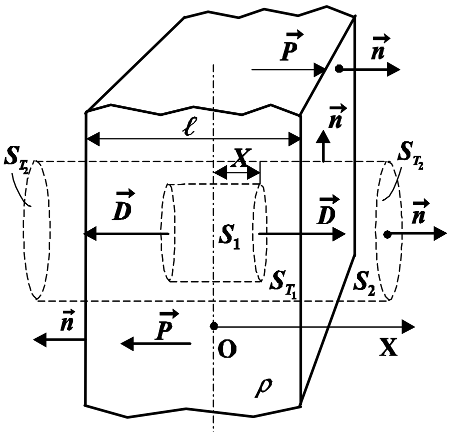


Рис. 2.2

Аналіз. Так як лінійні розміри бічних поверхонь шару значно більші його товщини, то можна вважати, що в точках достатньо віддалених від країв шару, як всередині його, так і зовні (поблизу) силові лінії є прямі, які нормальні до бічних поверхонь шару. Така плоскосиметрична конфігурація поля дозволяє знайти напруженість поля за допомогою теореми Остроградського- Гаусса. Знаючи напруженість поля як функцію координат, можна визначити різницю потенціалів між заданими точками.

Так як об'ємний заряд розподілений по діелектрику, то використаємо узагальнену теорему (2.5). Щоб знайти електричне зміщення D і напруженість E всередині і зовні шару, проведемо дві допоміжні поверхні S_1 і S_2 у вигляді циліндричних поверхонь, торці яких паралельні середній площині шару, симетричні відносно неї і значно менші за площею.

Розв'язок. Розглянемо ліву частину рівняння (2.5). Так як конфігурація поля плоско симетрична, то у всіх точках бічних поверхонь циліндрів S_1 і S_2 вектори $\vec{D}$ і $d\vec{S} = \vec{n}dS$ взаємно перпендикулярні і тому $\vec{D}d\vec{S} \equiv 0$. Для торцевих поверхонь вектори $\vec{D}$ і $d\vec{S}$ колінеарні і $\vec{D}d\vec{S} = DdS$. Тому

$$\oint_{S_{1,2}} \vec{D}d\vec{S} = \oint_{S_{T1,2}} DdS = 2DS_T, \qquad (1)$$

де S_T – площа основи (торця) допоміжної поверхні інтегрування.

Рівність (1) справедлива, тому що обидва торці розташовані симетрично відносно зарядженого шару і D у всіх точках обох торців можна вважати однаковим. Індекси 1 і 2 означають, що всі проведені міркування справедливі як для першої S_1, так і для другої S_2 поверхонь.

Сума вільних зарядів, що охоплюються поверхнею S_1, залежить від висоти h цієї циліндричної поверхні. Якщо ввести вісь OX, то $h = 2|x|$, де x – координата торця. Для поверхні S_1 ($|x| < \ell / 2$)

$$\sum q_i = 2|x|S_{T_1} \cdot \rho . \qquad (2)$$

Тоді згідно теореми (2.5) і рівностей (1) і (2) отримаємо:

$$D \cdot 2S_{T_1} = 2|x|S_{T_1}\rho.$$

Звідки

$$D = \rho|x|,$$

а

$$D_x = \rho x \ \ (D_y = D_z = 0). \tag{3}$$

Сума вільних зарядів, що охоплюються поверхнею $S_2\,(|x| > \ell/2)$, вже не залежить від координати торців і $\sum q_i = S_{T_2}\ell\rho$. Тоді згідно теореми (2.5) і рівності (1) отримаємо:

$$D \cdot 2S_{T_2} = S_{T_2}\ell\rho.$$

Звідки

$$D = \rho\ell/2$$

і

$$D_x = \frac{\rho\ell}{2} \cdot \frac{x}{|x|} \ \ (D_y = D_z = 0). \tag{4}$$

Знак D_x у виразах (3) і (4) визнається знаком координати x і об'ємної густини ρ.

Врахуємо співвідношення (2.6) між векторами $\vec{P}, \vec{D}$ і $\vec{E}$. Тоді згідно рівностей (3) і (4) отримаємо, що:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\rho x}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ для } |x| < \ell/2 \\ &\text{і} \\ E_x &= \frac{\rho\ell}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} \text{ для } |x| > \ell/2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а

$$E_y = E_z = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho x \ \text{для} \ |x| < \ell / 2, \\ P_x &= 0 \ \text{для} \ |x| > \ell / 2, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

а

$$P_y = P_z = 0 .$$

Графіки $D_x(x), E_x(x), P_x(x)$ побудовані за виразами (3), (4), (5), (6) приведені на рис. 2.3.

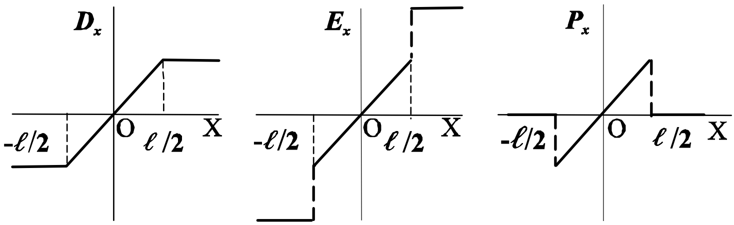


Рис. 2.3

На границі шару терплять розрив E_x і P_x (нормальні складові векторів $\vec{E}$ і $\vec{P}$), але не терпить розриву D_x. Це означає, що на поверхні діелектричного шару, який заряджений по об'єму, поверхнева густина вільних зарядів дорівнює нулеві, але внаслідок поляризації діелектрика виникають зв'язані заряди. Поверхневу густину зв'язаних зарядів можна визначити за формулою (2.4) і рівності (6) при $x = \ell / 2$, а саме

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{\rho\ell}{2}.$$

Так як кут між нормалями $\vec{n}$ до бічних поверхонь шару і вектором поляризації $\vec{P}$ дорівнює нулю, то на обох поверхнях шару поверхнева густина зв'язаних зарядів $\sigma' > 0$. Це означає, що в середині шару повинен існувати від'ємний зв'язаний заряд (сумарний зв'язаний заряд дорівнює нулю). Цим і пояснюється розрив E_x і P_x.

Графік потенціалу $\varphi(x)$ можна побудувати за графіком $E_x(x)$. Початок відліку потенціала на безмежності вибрати не можна так як плоско симетрична конфігурація поля не зберігається на великих відстанях від шару. Тому будемо вважати, що $\varphi = 0$ для точок середньої площини шару $(x = 0)$. Тоді для всієї області $x > 0$ $E_x = -\dfrac{d\varphi}{dx} > 0$, $\dfrac{d\varphi}{dx} < 0$ і це означає, що $\varphi(x)$ зменшується із ростом *x*. Для всієї області $x<0$ $E_x = -\dfrac{d\varphi}{dx} < 0$, $\dfrac{d\varphi}{dx} > 0$ і це означає $\varphi(x)$ збільшується із ростом *x*. Таким чином, крива $\varphi(x)$ симетрична відносно початку координат і в точці $x = 0$ має максимум ($E_x = -\dfrac{d\varphi}{dx} = 0$). Для області $0 < x < \ell/2$ з урахуванням рівності (5) можемо записати, що

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}\int_0^{x} x dx .$$

Звідки отримаємо, що

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{\varepsilon_0\varepsilon}. \tag{7}$$

Для області $-\dfrac{\ell}{2} < x < 0$ аналогічно запишемо:

$$\int_{\varphi}^{0} d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}\int_x^{0} x dx .$$

Звідки теж отримаємо співвідношення (7). Для області $|x| > \ell/2$, $E_x = \text{const}$. Це означає що функція $\varphi(x)$ є лінійна. Точкам

$|x| = \ell/2$, де E_x терпить розрив, на графіку $\varphi(x)$ відповідають точки згину (L, M) (рис. 2.4). Співвідношення (7) дозволяє знайти різницю потенціалів між серединою шару і його поверхнею, а саме $\varphi(0) - \varphi(\ell/2) = \dfrac{\rho\ell^2}{8\varepsilon\varepsilon_0}$. Рівність (5) дозволяє знайти різницю потенціалів між поверхнею шару і точкою, яка знаходиться на відстані ℓ від середини шару.

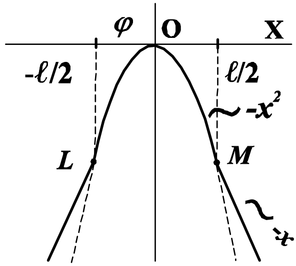


Рис. 2.4

$$\varphi(\ell/2) - \varphi(\ell) = \int_{\ell/2}^{\ell} E_x dx =$$

$$= \frac{\rho\ell}{2\varepsilon_0}\int_{\ell/2}^{\ell} dx = \frac{\rho\ell^2}{4\varepsilon_0}.$$

Задача 2.3. В просторі, який наполовину заповнений парафіном $(\varepsilon_2 = 2)$, створене однорідне електричне поле, напруженість якого в повітрі E_1 =10 В/м. Вектор $\vec{E}_1$ утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з міжєю нормалі $\vec{n}$ до межі парафін - повітря, яку можна вважати плоскою, рис. 2.5,*а*. Визначити вектори електричного зміщення, напруженості, поляризації та поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів в парафіні. Парафін вважати однорідним діелектриком.

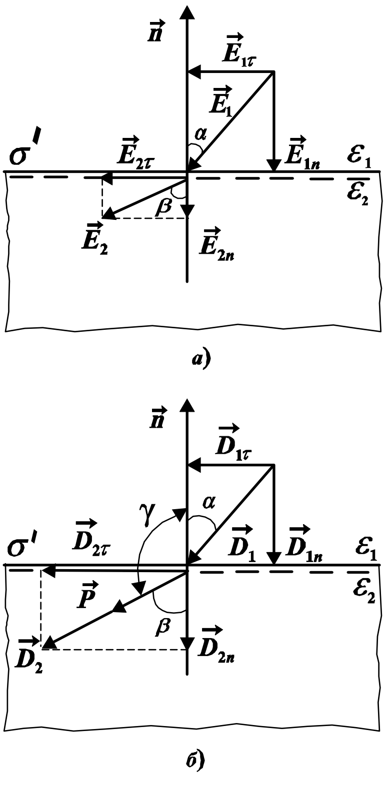


Рис. 2.5

Розв'язок. За умовою задачі відомі модуль і напрямок вектора напруженості $\vec{E}_1$ в повітрі

$(\varepsilon_1 = 1)$, а значить , і вектор електричного зміщення. Тому мета задачі зводиться до використання співвідношень між нормальними і тангенціальними (дотичними) складовими векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ при переході через межу повітря-діелектрик. Згідно співвідношень (2.7) нормальна складова вектора $\vec{D}$ і дотична складова вектора $\vec{E}$ при переході через межу повітря-діелектрик не змінюються. Знаючи нормальні і дотичні складові векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$, можна знайти модулі і напрямки цих векторів в парафіні.

Вектор $\vec{D}_1$ колінеарний вектору $\vec{E}_1$ (напрямок останнього заданий). Електричні властивості повітря практично співпадають із властивостями вакууму.

Тому $D_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_1$, а $D_{1n} = D_1 \cos\alpha = \varepsilon_0 E_1 \cos\alpha$ (рис. 2.5б), а значить згідно (2.7)

$$D_{2n} = \varepsilon_0 E_1 \cos\alpha . \qquad (1)$$

Так як згідно (2.7) і (рис. 2.5,*а*) $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_1 \sin\alpha$, то врахувавши (2.6) , отримаємо:

$$D_{2\tau} = \varepsilon_2\varepsilon_0 E_1 \sin\alpha . \qquad (2)$$

Тоді

$$D_2 = \sqrt{{D_{2n}}^2 + {D_{2\tau}}^2} = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\cos^2\alpha + {\varepsilon_2}^2 \sin^2\alpha} =$$

$$= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10\sqrt{\cos^2 30^\circ + 2^2 \sin^2 30^\circ}\,\text{Кл/м}^2 = 117\ \text{пКл/м}^2.$$

При цьому вектор $\vec{D}_2$ утворює кут β з лінією нормалі $\vec{n}$, який знайдемо із співвідношення:

$$tg\beta = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 E_1 \sin\alpha}{\varepsilon_0 E_1 \cos\alpha} = \varepsilon_2 tg\alpha = 1{,}155.$$

Звідки $\beta = 49{,}1^\circ$. Діелектрик є ізотропним, тому вектори $\vec{E}_2$ і $\vec{D}_2$ колінеарні і в діелектрику. Тому згідно (2.6)

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{117 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \text{ В/м} = 6{,}6 \text{ В/м}.$$

Вектор поляризації $\vec{P}$ і $\vec{E}_2$ теж колінеарні (ізотропність діелектрика). Тому згідно (2.6)

$$P = \Phi_2 \varepsilon_0 E_2 =$$

$$= (\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 \cdot \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} D_2 = \frac{D_2}{2} = 58{,}5 \text{ пКл}/\text{м}^2.$$

Поверхневу густину σ' зв’язаних (поляризаційних) зарядів знайдемо за формулою (2.4), тобто

$$\sigma' = P\cos\gamma = P\cos(\pi - \beta) =$$
$$= -P\cos\beta = -58{,}5 \cdot \cos 49{,}1^\circ \text{ пКл/м}^2 = -38{,}3 \text{ пКл/м}^2.$$

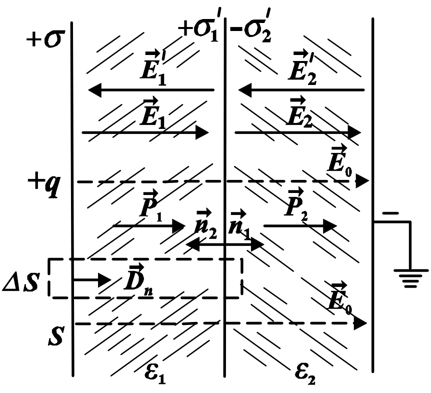


Рис. 2.6

Задача 2.4. Одній із пластин плоского конденсатора, площа якої S=0,1 м^2, наданий заряд q=+1 нКл (інша пластина з’єднана тонким провідником із землею). Між пластинами (паралельно до них) знаходяться скляна ($\varepsilon_1 = 7$) і фарфорова ($\varepsilon_2 = 6$) пластинки, які щільно прилягають одна до одної і до пластин конденсатора. Визначити напруженість електричного поля в склі і фарфорі, а також поверхневі густини σ_1' і σ_2' зв'язаних зарядів на них (рис. 2.6).

Розв'язок. Фізична система складається із конденсатора, на пластинах якого розподілені вільні електричні заряди з густиною $\sigma = q / S$ і двох діелектриків, на яких виникають зв'язані електричні заряди з густинами σ_1' і σ_2'. Необхідно визначити напруженості E_1 і E_2 електричного поля в діелектриках, а також густини σ_1' і σ_2' зв'язаних зарядів.

Метод суперпозиції

Поле в кожному діелектрику створюється вільними зарядами розташованими на пластинах конденсатора, напруженість якого дорівнює

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \tag{1}$$

і відповідно зв'язаними зарядами σ_1' і σ_2', розташованими на двох діелектричних пластинах, напруженості яких дорівнюють

$$E_1' = \frac{\sigma_1'}{\varepsilon_0} \text{ і } E_2' = \frac{|\sigma_2'|}{\varepsilon_0}\ . \tag{2}$$

Зауважимо, що зв'язані заряди створюють поле, відмінне від нуля тільки в «своєму» діелектрику. Як видно із рис. 2.6. результуюче поле в діелектриках буде:

$$E_1 = E_0 - E_1' \text{ і } E_2 = E_0 - E_2'.$$

За формулою (2.8) $E_1 = E_0 / \varepsilon_1$, $E_2 = E_0 / \varepsilon_2$.

Тоді

$$\frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_0 - \frac{\sigma_1'}{\varepsilon_0}, \text{ а } \frac{E_0}{\varepsilon_2} = E_0 - \frac{|\sigma_2'|}{\varepsilon_0}.$$

Врахувавши формули (1) і (2) цієї задачі, отримаємо:

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}\,;\; E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}\,;\; \sigma_1' = \frac{(\varepsilon_1 - 1)q}{\varepsilon_1 S}\,;$$

$$|\sigma_2'| = \frac{(\varepsilon_2 - 1)q}{\varepsilon_2 S}\,.$$

Після підстановки числових значень знаходимо:

$$E_1 = \frac{10^{-9}}{8{,}89 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 0{,}1} = 161\ \text{В/м};\;\; E_2 = 188\ \text{В/м};$$

$$\sigma_1' = \frac{(7-1)\cdot 10^{-9}}{7 \cdot 0{,}1}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 8{,}57\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}^2};$$

$$|\sigma_2'| = \frac{(6-1)\cdot 10^{-9}}{6 \cdot 0{,}1}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 8{,}33\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}\,.$$

Метод Остроградського-Гауса. За теоремою (2.5) і співвідношенням (2.7) визначаємо вектор електричного зміщення в любому діелектрику (рис. 2.6):

$$D_n \Delta S = \sigma \Delta S,\quad D_n = \sigma = q/S.$$

За формулою (2.7) будемо мати, що

$$D_{1n} = D_{2n} = q/S\,,$$

а із врахування (2.6)

$$\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 = q/S\,.$$

Звідки отримаємо:

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S};\;\; E_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}\,.$$

За формулами (2.4) і (2.6) знаходимо:

$$\sigma_1' = P_{1n} = \Phi_1 \varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{q}{S}$$

і

$$\sigma_2' = P_{2n} = -\Phi_2 \varepsilon_0 E_2 = -(\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_2 = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{q}{S}.$$

Задача 2.5. В безмежному однорідному і ізотропному діелектрику, в якому створене відоме однорідне поле, напруженість якого E_0, є сферична порожнина, радіус якої R (рис. 2.7). Знайти напруженість електричного поля в центрі порожнини.

Розв'язок. Задача дуже подібна до задачі 1.8 з тією різницею, що поверхнева густина заряду σ' за формулою (2.4) буде:

$$\sigma' = P_0 \cos\theta = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_0 \cos\theta.$$

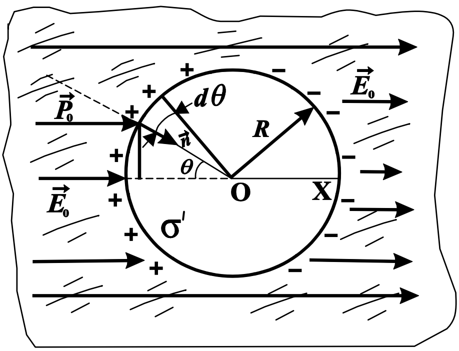


Рис. 2.7

Як і в задачі 1.8, розділимо порожнину на тонкі кільця. Заряд такого кільця

$$dq = 2\pi R^2 \sigma' \sin\theta d\theta.$$

Проекція напруженості поля кільця на вісь OX в точці O буде:

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\cos^2\theta \sin\theta d\theta.$$

Звідси після інтегрування знаходимо напруженість однієї напівсфери:

$$E_{1x} = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{\varepsilon - 1}{6}E_0.$$

Напруженість поля двох напівсфер

$$E_{2x} = 2E_{1x} = \frac{\varepsilon - 1}{3} E_0 .$$

Сумарна напруженість поля в точці О

$$E = E_0 + E_{2x} = \frac{\varepsilon + 2}{3} E_0 .$$

Задача 2.6. У гас ($\varepsilon = 2$) на глибині h = 4 см від вільної поверхні (поверхня, що межує з повітрям), знаходиться точковий заряд q = 30 нКл (рис. 2.8). Визначити густину поляризаційних (зв'язаних) зарядів на поверхні гасу: а) над зарядом в точці 1 і б) на відстані r = 8 см від заряду в точці 2; в) визначити сумарну величину зв'язаних зарядів на поверхні гасу.

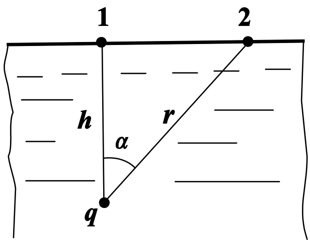


Рис. 2.8

Аналіз. Під дією електричного поля заряду q гас буде поляризуватись, що викличе появу поляризаційних (зв'язаних) зарядів на вільній поверхні гасу. Для розв'язку задачі будемо користуватись формулами: (2,4), (2,6), (2,7).

Розв'язок.

а) Розглянемо спочатку точку 1. За формулами (2.4) і (2.6) поверхнева густина зв'язаних зарядів в цій точці буде

$$\sigma_1' = P_{n1} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_{1n} ,$$

де E_{1n} – проекція напруженості електричного поля в гасі на нормаль $\vec{n}$ в точці 1 (рис. 2.9.). $E_{1n} = E_1 - E_1'$, де $E_1 = q/(4\pi\varepsilon_0 h^2)$ – напруженість поля, яку в точці 1 створює заряд q, $E_1' = \sigma_1' / 2\varepsilon_0$ – напруженість , що створюється зарядженою поверхнею в точці 1. Тоді

$$\sigma_1' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} - \frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0}\right).$$

Звідки знаходимо:

$$\sigma_1' = \frac{q}{2\pi h^2}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (1)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\sigma_1' = \frac{30\cdot 10^{-9}}{2\pi(4\cdot 10^{-2})^2}\cdot\frac{2-1}{2+1}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 1\ \text{мкКл/м}^2.$$

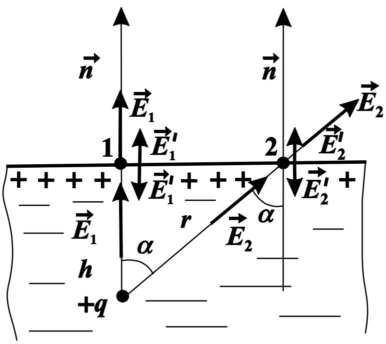


Рис. 2.9

Формулу (1) можна отримати із формули (2.7) , а саме $D_{1n} = D_{2n}$. Гас будемо вважати першим середовищем, а повітря другим середовищем. Тоді згідно рисунка 2.9 і формули (2.6)

$$(E_1 - E_1')\varepsilon\varepsilon_0 = (E_1 + E_1')\varepsilon_0.$$

Із цього співвідношення можна отримати формулу (1).

б) Для точки 2 аналогічно як і для точки 1 можемо записати:

$$\sigma_2' = P_{2n} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0(E_2\cos\alpha - E_2'),$$

де $E_2 = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ – напруженість поля, яку створює заряд q в точці 2, де густина зв'язаних зарядів σ_2', а $E_2' = \sigma_2'/2\varepsilon_0$, $\cos\alpha = h/r$.

Тоді

$$\sigma_2' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{h}{r} - \frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0}\right).$$

З цього співвідношення знаходимо, що

$$\sigma_2' = \frac{qh}{2\pi r^3}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \, . \qquad (2)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\sigma_2' = \frac{30\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-2}}{2\pi(8\cdot 10^{-2})^3}\cdot\frac{2-1}{2+1}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 0{,}124 \text{ мкКл/м}^2.$$

Формулу (2) можна отримати за допомогою співвідношення (2.7) для точки 2, а саме

$$(E_2\cos\alpha - E_2')\varepsilon\varepsilon_0 = (E_2\cos\alpha + E_2')\varepsilon_0 \, .$$

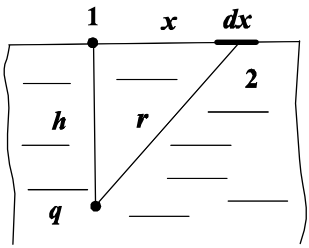


Рис. 2.10

З цього співвідношення легко отримати формулу (2).

в) Для розрахунку сумарної величини зв'язаних зарядів розглянемо нескінченно вузьке кільце, радіус якого x, центр знаходиться в точці 1, а ширина кільця dx (рис. 2.10). Площа такого кільця $dS = 2\pi x dx$. Заряд на ньому дорівнює $dq' = \sigma_2' dS$.

Якщо використати формулу (2) із врахуванням, що $r = \sqrt{h^2 + x^2}$, то

$$dq' = \frac{qh(\varepsilon-1)}{\varepsilon+1}\cdot\frac{xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}} \, .$$

Повний заряд на всій поверхні:

$$q' = \frac{qh(\varepsilon-1)}{\varepsilon+1}\int_0^\infty \frac{xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}} = q\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = 10 \text{ нКл}.$$

При отриманні цього результату враховано, що інтеграл дорівнює $1/h$.

Задача 2.7. Визначити ємність провідника у вигляді кулі, радіус якої R_1 = 10 см. Куля оточена концентричним шаром однорідного діелектрика (ε = 6) із зовнішнім радіусом R_2 = 15 см, який щільно прилягає до кулі (рис. 2.11). Порівняти значення ємності кулі з ємністю конденсатора з такими ж параметрами.

Розв'язок. Надамо кулі деякий заряд q. Тоді біля поверхні провідника ззовні нього виникає електричне поле.

Якщо знайдемо потенціал провідника $\varphi(R_1)$, то за формулою (2.10) зможемо знайти електроємність *C*.

Перемістимо уявно деякий пробний заряд із точки 1 в точку 3. При цьому згідно формули (1.12) буде виконана робота

$$A_{13} = \frac{qq_{np}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} - \frac{qq_{np}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2} + \frac{qq_{np}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{qq_{np}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}.$$

Тоді різниця потенціалів між точками 1 і 3 згідно (1.13) буде:

$$\varphi(R_1) - \varphi(R_3) = \frac{A_{13}}{q_{np}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon R_1} - \frac{1}{\varepsilon R_2} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right).$$

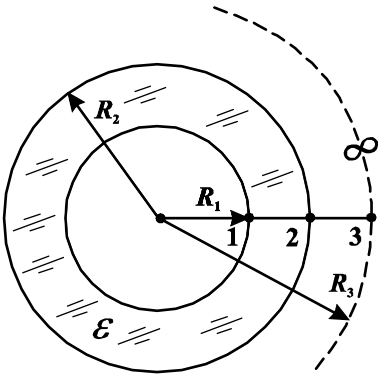


Рис. 2.11

Якщо прийняти $\varphi(R_3) = 0$ при умові, що $R_3 \to \infty$, то потенціал в точці 1 (тобто потенціал кулі) буде:

$$\varphi(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}(\varepsilon - 1)\right).$$

Звідки знаходимо, що електроємність кулі

$$C = \frac{q}{\varphi(R_1)} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}(\varepsilon - 1)} = 15{,}4 \text{ пФ}.$$

За формулою (2.14) електроємність конденсатора буде:

$$C' = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 200 \text{ пФ}.$$

Задача 2.8. Визначити ємність сферичного конденсатора з радіусами обкладок $R_1 =$ 10 см і $R_2 =$ 15 см (рис. 2.12), який заповнений ізотропним діелектриком, проникність якого змінюється за законом $\varepsilon = a / r^2$, де a =0,006 м^2 – постійна, r – відстань від центру конденсатора $(R_1 \le r \le R_2)$.

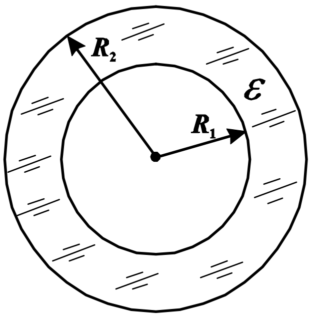


Рис. 2.12

Розв'язок: Надамо внутрішній обкладці заряд q. Тоді напруженість поля всередині діелектрика буде:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Так як $E = -\frac{d\varphi}{dr}$, то $d\varphi = -Edr$ і різниця потенціалів між сферами:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}(R_1 - R_2).$$

Звідки знаходимо, що ємність такого конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}} \text{ Ф} = 133,5 \text{ пФ}.$$

Задача 2.9. Циліндричний конденсатор, радіуси обкладинок якого R_1 = 1 см, R_2 = 1,5 см, заповнений двома коаксіальними шарами діелектрика (рис. 2.13). Перший шар просякнутий папір ($\varepsilon_1 = 4$), другий – кераміка ($\varepsilon_2 = 7$). Радіус межі розділу діелектриків R_0 = 1,3 см. При якій різниці потенціалів між обкладинками почнеться пробій конденсатора? Гранична напруженість поля для паперу E_{1max} = 12 МВ/м; для кераміки E_{2max} = 10 МВ/м.

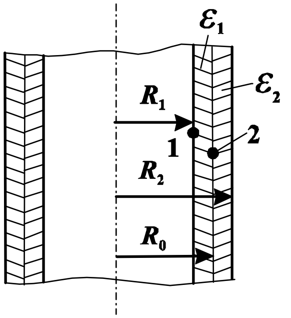


Рис. 2.13

Аналіз. Граничною або пробійною називається така напруженість електричного поля при якій починається руйнування молекул діелектрика. Сам процес пробою дуже складний, тому в електростатиці можна говорити тільки про початок пробою і не розглядати подальший розвиток процесу.

В даній задачі необхідно перш за все визначити, який із двох шарів діелектрика при підвищенні різниці потенціалів між обкладинками буде пробитий першим, тобто в якому діелектрику напруженість досягне граничного значення. Поле всередині конденсатора неоднорідне і напруженість зменшується із збільшенням відстані від осі системи. Тому пробій може початись в точках, найбільш близьких до осі системи, тобто в першому шарі при $r = R_1$, в другому – при $r = R_0$.

Аналогічно як в задачах 1.3, 2.1 можемо отримати, що модуль вектора електричного зміщення

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \qquad (1)$$

де λ – лінійна густина заряду на внутрішній обкладинці, r – відстань від любої точки діелектрика конденсатора до осі системи. При цьому вектор $\vec{D}$ нормальний до межі розділу і вираз (1) справедливий в любій точці конденсатора. Врахувавши (2.6) отримаємо вираз для напруженості поля у вказаних вище точках:

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R_1} \quad (r = R_1),$$
$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 R_0} \quad (r = R_0). \qquad (2)$$

Значення цих напруженостей залежить від λ, тобто зростають із збільшенням заряду, а значить, і різниці потенціалів на обкладинках, але їх відношення залишається незмінним, так як згідно (2.7) $D_{1n} = D_{2n}$. Тобто:

$$E_1 / E_2 = \varepsilon_2 R_0 / \varepsilon_1 R_1 = 7 \cdot 1{,}3/(4 \cdot 1) = 2{,}275.$$

Це відношення дозволяє визначити в якому шарі почнеться пробій. Прирівнявши E_1 або E_2 відповідній пробійній напруженості поля, визначимо значення $\lambda_{\text{макс}}$, при якій наступає пробій. Різницю потенціалів при цьому знайдемо за формулою (1.18):.

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr. \quad (3)$$

Розв'язок. Відношення пробивних значень напруженостей $E_{1\text{мах}}/E_{2\text{мах}}$ = 1,2, а відношення цих напруженостей при любій різниці потенціалів E_1/E_2=2,275. Це означає, що коли в точці 1 (папір) напруженість буде пробійною (12 МВ/м) , то в точці 2 (кераміка) напруженість буде 5,275 МВ/м, тобто меншою, ніж пробійна напруженість кераміки. Таким чином, пробій почнеться в папері. Тоді із (2) отримаємо:

$$\lambda_{\text{макс}} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R_1 E_{1\,макс}. \quad (4)$$

Щоб знайти різницю потенціалів, необхідно знайти $\mathrm{E}(r)$. Із (1) отримаємо:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r} \quad (R_1 < r < R_0),$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r} \, (R_0 < r < R_2).$$

$E(r)$ терпить розрив при $r = R_0$. Тому інтеграл в (3) розбиваємо на два:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\int\limits_{R_1}^{R_0}\frac{dr}{r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\int\limits_{R_0}^{R_2}\frac{dr}{r}.$$

Врахувавши, що $\int\frac{dr}{r} = \ln r$, отримаємо, що

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{R_0}\right).$$

Підставимо $\lambda = \lambda_{мах}$ із (4):

$$U_{мах} = \varepsilon_1 R_1 E_{1мах}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{R_0}\right).$$

Підставимо числові значення:

$$U_{мах} = 4\cdot10^{-2}\cdot12\cdot10^{6}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1{,}3}{1} + \frac{1}{7}\ln\frac{1{,}5}{1{,}3}\right) = 41{,}3 \text{ кВ}.$$

Задача 2.10. Визначити електроємність двопровідної лінії, що приходиться на одиночну довжину. Вважати, що інші тіла знаходяться далеко від лінії і їхнім виливом на електричне поле між провідниками можна знехтувати. Прийняти, що радіуси проводів r =0,5 мм, а відстань між ними ℓ =10 мм.

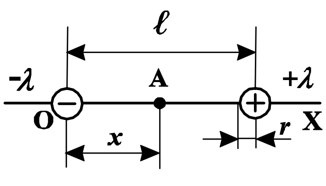


Рис. 2.14

Розв'язок. Будемо вважати, що провідники прямі, тонкі, безмежно довгі і паралельні. Нехай вони заряджені з лінійними густинами $-\lambda$ і $+\lambda$. Тоді напруженість електричного поля в точці А (рис. 2.14) згідно формули (1.11) і принципу суперпозиції (1.4) буде:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(\ell - x)}.$$

Враховуючи зв’язок між напруженістю і потенціалом (1.17) знайдемо різницю потенціалів між проводами:

$$|\Delta\varphi| = \int_r^{\ell-r} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_r^{\ell-r}\frac{dx}{x} + \int_r^{\ell-r}\frac{dx}{\ell - x}\right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\ell - r}{r}.$$

Тоді ємність лінії одиничної довжини буде:

$$C = \frac{\lambda}{|\Delta\varphi|} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\ell - r}{r}} = \frac{\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{\ln\frac{10 - 0{,}5}{0{,}5}} = 9{,}45 \text{ пФ /м.}$$

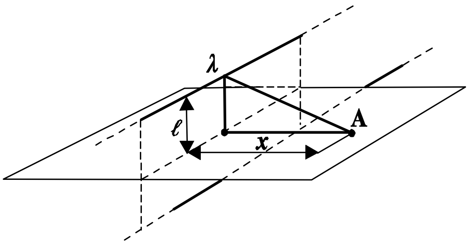


Рис. 2.15

Задача 2.11. Тонка нескінченно довга нитка рівномірно заряджена електрикою з лінійною густиною λ = 10,55 нКл/м і розташована паралельно безмежній провідній площині на відстані $\ell = 10$ см від неї (рис. 2.15). Знайти: а) модуль вектора сили, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини; б) розподіл поверхневої густини заряду на площині, де

x – відстань від площини, яка проходить через нитку і перпендикулярна до провідної площини.

Розв’язок. Для визначення сили, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини, необхідно розрахувати поле її зображення. За формулою (1.11) напруженість цього поля

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2\ell)}.$$

Тоді сила, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини,

$$F = E\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\ell} = \frac{(10{,}55\cdot 10^{-9})^2}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1}\,\text{Н} = 10\ \text{мкН}.$$

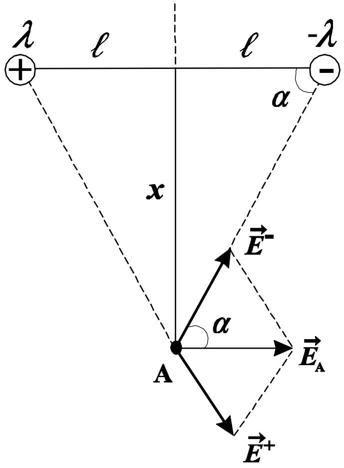


Рис. 2.16

Для відповіді на друге питання задачі необхідно визначити напруженість поля в точці А. Для цього розглянемо рис. 2.15 в іншій проекції. «Дзеркальне» зображення нитки в провідній площині будемо вважати ниткою зарядженою негативним зарядом рис. 2.16. Як видно з рис. 2.16. напруженість поля в точці А згідно принципу суперпозиції

$$\vec{E}_\text{A} = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-},$$

де $\left|\vec{E}^{+}\right| = \left|\vec{E}^{-}\right| = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{\ell^2 + x^2}}$ – напруженості полів створюваних кожного ниткою. В наслідок симетрії задачі $\left|\vec{E}_\text{A}\right| = 2\left|\vec{E}^{-}\right|\cos\alpha$, де $\cos\alpha = \dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}$.

Тоді напруженість поля в точці А буде

$$\left|\vec{E}_\text{A}\right| = \frac{\lambda\ell}{\pi\varepsilon_0(\ell^2 + x^2)}. \qquad (1)$$

Напруженість поля індукованих зарядів біля провідної поверхні (поза нею) за формулою (2.9) буде:

$$E' = \sigma/\varepsilon_0\ . \qquad (2)$$

Індуковані заряди розподіляються так, що їхнє поле всередині площини компенсує зовнішнє поле E_A (напруженість поля всередині провідника, який розташований в електростатичному полі, дорівнює нулю):

$$\vec{E}_A + \vec{E}' = 0, \text{ або } \left|\vec{E}_A\right| = \left|\vec{E}'\right|. \qquad (3)$$

Підставивши (1) і (2) в (3) отримаємо:

$$\sigma = \frac{\lambda\ell}{\pi(\ell^2 + x^2)} \approx \frac{0{,}336}{0{,}01 + x^2} \text{ нКл/м}^2.$$

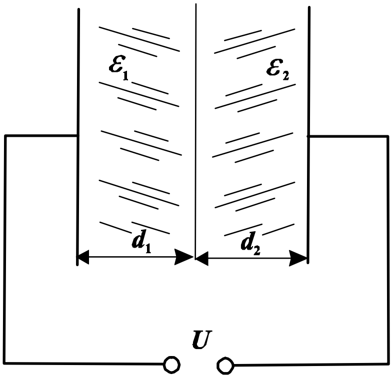


Рис. 2.17

Задача 2.12. Плоский конденсатор, площа пластин якого S = 500 см^2, заповненій двома шарами із діелектриків. Межа між ними паралельна обкладках. Перший шар слюда ($\varepsilon_1 = 7{,}5$) товщиною d_1= 0,1 см, другий шар – скло (ε_2 = 6) товщиною d_2 = 0,3 см (рис. 2.17). Конденсатор заряджений до різниці потенціалів U = 400 В. Визначити енергію зарядженого конденсатора.

Аналіз. В конденсаторі електричне поле практично локалізоване між його обкладинками. Енергія зарядженого конденсатора може бути знайдена, або за загальною формулою (2.15), або за (2.16). Для знаходження напруженості електричного поля треба скористатись співвідношенням (1.18), з якого

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U = \int_1^2 \vec{E}d\vec{\ell}. \qquad (1)$$

Розв'язок. Так як поле в конденсаторі однорідне, то рівність (1) можна записати так:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \qquad (2)$$

де E_1 – напруженість поля в слюді, E_2 – напруженість поля в склі. Межа розділу діелектриків паралельна обкладинкам конденсатора і тому вона нормальна силовим лініям поля. Згідно (2.7)

$$D_1 = D_2 \quad \text{і} \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 . \tag{3}$$

Рівняння (2) і (3) представляють собою систему рівнянь відносно невідомих E_1 і E_2. Розв'язок цих рівнянь дає:

$$E_1 = \varepsilon_2 U / (\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2); \; E_1 = \varepsilon_1 U / (\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2) . \tag{4}$$

В межах кожного шару густина енергія постійна і згідно (2.15):

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1^2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2^2}{2}. \tag{5}$$

Тоді за формулою (2.16) енергія конденсатора

$$W = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2 ,$$

де $V_1 = Sd_1$, а $V_2 = Sd_2$.

Із урахуванням (4) і (5) отримаємо:

$$W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 U^2 S}{2(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)} = \frac{7{,}5 \cdot 6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2(6 \cdot 10^{-3} + 7{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{-3})} \text{Дж} = 56 \text{мкДж}.$$

Для знаходження енергії цього зарядженого конденсатора за формулою (2.17) розрахуємо його ємність . Даний конденсатор можна розглядати як два послідовно з'єднані конденсатори, ємність кожного з яких є :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d_1}; \; C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Тоді ємність комбінованого конденсатора буде

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

і за (2.17) отримаємо вираз для енергії конденсатора, який буде співпадати із раніше отриманим.

Задача 2.13. Повітряний конденсатор, ємність якого C_1= 0,4 мкФ, заряджений до різниці потенціалів U_0 = 1000 В. Знайти зміну енергії конденсатора і роботу сил поля при заповненні конденсатора рідким діелектриком (чиста вода ε = 81). Розрахунок виконати для двох випадків: 1)заповнення конденсатора рідиною відбувається при відключеному джерелі напруги; 2) заповнення конденсатора рідиною відбувається при включеному джерелі напруги.

Аналіз. Робота A сил кулонівського поля конденсатора може бути розрахована із рівняння енергетичного балансу:

$$\Delta W = -A + A_{\text{джер}}, \qquad (1)$$

де ΔW – зміна енергії конденсатора, $A_{\text{джер}}$ – робота джерела напруги по перенесенню заряду в колі.

При внесенні діелектрика в електричне поле конденсатора сили поля здійснюють позитивну роботу A незалежно від того, відключений попередньо конденсатор від джерела чи ні. Сили кулонівського поля поляризують діелектрик, втягують його в область більшої напруженості. Таким чином $A > 0$.

В першому випадку за рахунок цієї позитивної роботи сил поля енергія конденсатора зменшується. В другому випадку напруга на обкладинках конденсатора залишається незміною, значить при внесенні діелектрика заряд конденсатора повинен зростати. Це значить, що джерело напруги «посилає» додатковий заряд конденсатору, здійснюючи позитивну роботу і характер зміни енергії конденсатора наперед невідомий.

Очевидно, що в першому випадку (q = const) і зміну енергії конденсатора зручно розраховувати за формулою (2.17)

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}, \qquad (2)$$

а в другому (U = const) –

$$\Delta W = \frac{C_2 U_0{}^2}{2} - \frac{C_1 U_0{}^2}{2}, \qquad (3)$$

де $C_2 = \varepsilon C_1$, оскільки діелектрик повністю заповнює весь конденсатор.

Розв'язок. 1. В першому випадку $A_{джер} = 0$ (джерело відключене при заповненні конденсатора діелектриком) і рівняння (1) з урахуванням (2) запишеться:

$$\Delta W = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon C_1} - \frac{1}{C_1}\right) = -A_1,$$

або, врахувавши, що $q = C_1 U_0$ –

$$\Delta W = \frac{C_1 U_0{}^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2}\left(\frac{1}{81} - 1\right) = -\,0{,}2 \text{ Дж};$$

$$A_1 = 0{,}2 \text{ Дж}.$$

2. Конденсатор весь час підключений до джерела напруги. Згідно (3) зміна енергії конденсатора буде:

$$\Delta W = \frac{C_1 U_0{}^2}{2}(\varepsilon - 1) = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2}(81 - 1) \text{ Дж} = 16 \text{ Дж}.$$

Звернемо увагу на те, що в цьому випадку хоч сили кулонівського поля здійснювали позитивну роботу, енергія конденсатора суттєво збільшилась, що можливо тільки за рахунок роботи джерела живлення по перенесенню заряду $\Delta q = C_2 U_0 - C_1 U_0 = C_1 U_0(\varepsilon - 1)$. Ця робота дорівнює

$$A_{джер} = \Delta q \cdot U_0 = C_1 {U_0}^2 (\varepsilon - 1) = 2\Delta W .$$

Тоді згідно (1)

$$A_2 = A_{джер} - \Delta W = \Delta W = 16 \text{ Дж}.$$

Як видно, $A_2 >> A_1$. Це пояснюється тим, що в першому випадку в процесі заповнення конденсатора діелектриком сили поля слабшають.

Задача 2.14. Заряд q , рівномірно розподілений в вакуумі по об'єму, який має форму кулі, радіус якої R. Розрахувати енергію. електричного поля.

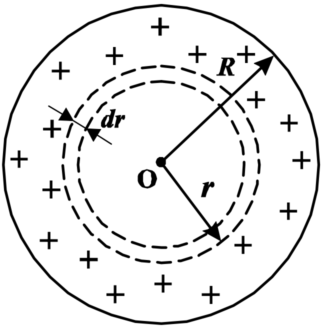


Рис. 2.18

Аналіз. Заряд q створює електричне поле як в області, яку займає він сам, так і поза нею. За формулою (2.16) можемо розрахувати енергію електричного поля, де об'ємну густину енергії електричного поля будемо визначати за формулою (2.15).

Розв'язок. 1. Розглянемо випадок $r \le R$, де r відстань, що відраховується від центра кулі. Напруженість поля в середині кулі знайдемо за законом (2.5)

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} , \qquad (1)$$

де $\rho = q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – густина заряду. Тоді об'ємна густина енергії

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon_0 E_1(r)^2}{2} = \frac{q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^6} \qquad (r < R). \qquad (2)$$

Для випадку, коли ($r > R$), напруженість поля визначається за формулою для точкового заряду, а саме:

$$E_2(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

а об'ємна густина заряду –

$$\omega_2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \quad (r > R). \tag{3}$$

Так як залежність $\omega(r)$ різна для областей простору всередині і зовні заряду q, інтеграл (2.15) в правій частині розіб'ємо на два:

$$W = \int_{V_1} \omega_1 dV + \int_{V_2} \omega_2 dV, \tag{4}$$

де V_1 – об'єм простору, який займає заряд q; V_2 – об'єм простору поза кулею.

Враховуючи симетрію задачі, за об'єм dV необхідно вибрати тонкий кульовий шар, товщина якого dr, а радіус r (в межах такого об'єму W і ω постійні):

$$dV = 4\pi r^2 dr. \tag{5}$$

Підставляючи вирази (2), (3) і (5) в (4) отримаємо, що

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right) = \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Задача 2.15. Пояснити, чому всі заряди, які знаходяться на пластині плоского конденсатора, не дивлячись на їхнє взаємне відштовхування, розташовуються на внутрішній поверхні пластини (тобто на тій поверхні, яка повернута до сусідньої пластини).

Розв'язок. Пластини конденсатора є провідниками. Допустимо, що заряди розподілені і по зовнішній 1 – 1 і по внутрішній 2 – 2 площині пластини А (всередині провідника при електричній рівновазі зарядів не має). Якщо вважати пластини безмежними (відстань між пластинами і їхня товщина є набагато

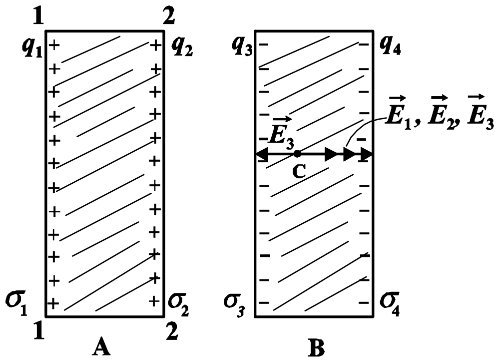


Рис. 2.19

меншими порівно з лінійними розмірами пластин), то заряди розподіляються по поверхням рівномірно. Тому заряджений конденсатор можна представити як систему чотирьох рівномірно заряджених площин. Нехай заряди на них q_1, q_2, q_3, q_4, а поверхневі густини зарядів $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ (рис. 2.19).

Тоді напруженість поля в любій точці С всередині пластини В згідно принципу суперпозиції (1.4) та формули(1.9) буде:

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0}(|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_4| - |\sigma_3|) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}(|q_1| + |q_2| + |q_4| - |q_3|),$$

де S – площа пластин.

Так як $|q_1| + |q_2| = |q_3| + |q_4|$, то

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}(|q_3| + |q_4| + |q_4| - |q_3|) = \frac{|q_4|}{\varepsilon_0 S}.$$

З другої сторони напруженість в точці С всередині провідника дорівнює нулеві, тобто $E_c = 0$ і як наслідок $q_4 = 0$. Це означає, що на зовнішній поверхні пластини В зарядів не має, всі заряди розподіляються по внутрішній поверхні пластини. Із симетрії задачі зрозуміло, що і на пластині А заряди розподіляються тільки по її внутрішній поверхні.

Задача 2.16. В поле плоского конденсатора АВ розміщують дві, паралельні пластинам А і В, провідні незаряджені пластини С і D (рис. 2.20). Відстані АС = CD = DB = d/3 = 1 см. Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U$ = 90 В. Пластинки С і D з'єднують провідником, а потім роз'єднують. Після цього цю ж процедуру проводять із пластинами A і B. Визначити: а) Яка буде різниця потенціалів між пластинами A і C, C і D , D і B? б) Чи є заряди на пластинах C і D? в) Яка напруженість поля між пластинами A і C, C і D , D і B?

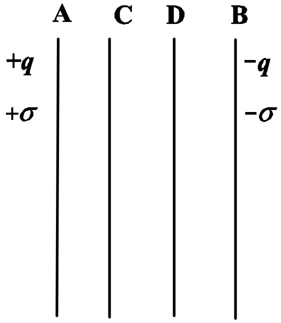


Рис.2.20

Розв'язок. Електричне поле конденсатора зосереджене між пластинами A і B. Напруженість поля

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d} = \frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Звідки знайдемо, що початкова густина заряду на пластинах A і B за модулем дорівнює $\sigma = \varepsilon_0 U / d$. На пластинах C і D зарядів не має. Коли з'єднати пластини C і D провідником, то потенціали їх повинні стати однаковими. Для цього відбудеться переміщення заряду по провіднику до тих пір, поки напруженість поля між пластинами C і D не стане дорівнювати нулеві. Це буде тоді, коли пластина C зарядиться негативно з поверхневою густиною $-\sigma$, а пластина D – позитивно з поверхневою густиною $+\sigma$. Різниця потенціалів між пластинами C і D $\varphi_C - \varphi_D = 0$. Коли пластини C і D роз'єднати, то заряди на них залишаться (рис. 2.21).

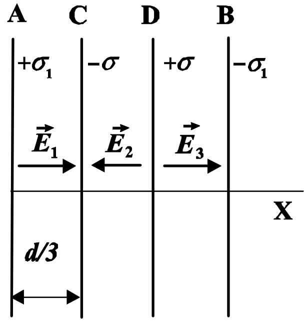


Рис. 2.21

Коли з'єднати провідником пластини A і B, то різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = 0$, це означає, що на цих пластинах відбудеться перерозподіл зарядів і густина заряду пластини A стане $+\sigma_1$, а пластини B – $-\sigma_1$. Напруженості полів між пластинами A і C та D і B будуть однаковими $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$.

$$E_1 = \frac{+\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0} - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}.$$

Напруженість поля між пластинами C і D буде:

$$E_2 = \frac{+\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0} - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Так як $\varphi_A - \varphi_B = 0$, то формально (маючи на увазі, що $|\sigma_1| < |\sigma|$ і $E_2 < 0$)

$$E_1 \cdot \frac{d}{3} + E_2 \cdot \frac{d}{3} + E_3 \cdot \frac{d}{3} = (2E_1 + E_2)\frac{d}{3} = 0,$$

або

$$2\sigma_1 + \sigma_1 - \sigma = 0.$$

Звідки знаходимо, що $\sigma_1 = \sigma / 3$.

Тоді

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} = \frac{U}{3d} = \frac{90}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ кВ/м},$$

а

$$E_2 = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{2}{3}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{2U}{3d} = \frac{90}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = -2 \text{ кВ/м}.$$

Знак «–» означає, що напруженість поля $\vec{E}_2$ направлена проти осі X (рис.2. 21).

Різниця потенціалів між пластинами A і C і D і B буде:

$$\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = E_1 \frac{d}{3} = \frac{U}{9} = 10 \text{ В},$$

а між пластинами C і D –

$$\varphi_C - \varphi_D = E_2 \frac{d}{3} = -\frac{2U}{9} = -20 \text{ В}.$$

Задача 2.17. Точковий заряд q = 0,1 мкКл знаходиться на відстані a = 10 см від центру заземленої провідної кулі, радіус якої
R = 5 см. З якою силою F заряд q притягується до кулі ? Яку роботу A треба затратити, щоб точковий заряд видалить на безмежність?

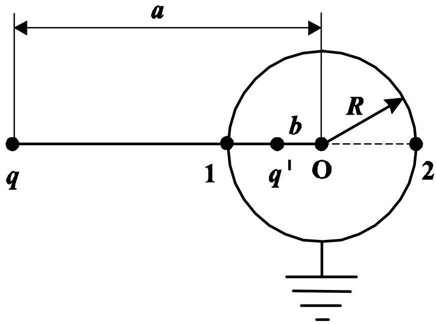


Рис. 2.22

Аналіз. Поле заряду q наводить на кулі заряд q'. Враховуючи симетрію кулі, поле наведеного на кулі заряду можна замінити полем точкового заряду, який розміщений на відстані b від центру кулі (рис. 2.22.) Величину заряду q' і відстань b знайдемо із умови, що потенціал заземленої кулі дорівнює нулеві. Тоді сила взаємодії заряду q із кулею дорівнює силі взаємодії між зарядами q і q'.

Розв'язок. Потенціали точок 1 і 2 (рис. 2.22) дорівнюють нулеві. Згідно принципу суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a-R)} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(R-b)} = 0, \qquad (1)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a+R)} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(R+b)} = 0. \qquad (2)$$

Розв'язуючи ці два рівняння відносно q' і b знаходимо:

$$q' = -q\frac{R}{a}, \qquad (3)$$

$$b = R^2 / a. \qquad (4)$$

Тоді сила взаємодії заряду q і кулі буде:

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 (a-b)^2} = -\frac{\mathrm{q}^2 R/a}{4\pi\varepsilon_0 (a - \frac{R^2}{a})^2} =$$

$$= -\frac{\mathrm{q}^2 Ra}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 - R^2)^2} = -8 \text{ мН.}$$

Знак «–» означає, що заряд q притягується до кулі.

Так як заряд q буде переміщуватись в електричному полі, то

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1,$$

де $W_2 = 0$ (потенціальну енергію на безмежності приймаємо за нуль), а

$$W_1 = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 (a-b)}.$$

Врахувавши (3) і(4) даної задачі, отримаємо, що

$$A = -\frac{q^2 R}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 - R^2)} = -0{,}6 \text{ мДж.}$$

Знак «–» означає, що роботу повинні виконати ми , щоб перенести заряд q на безмежність.

2.6. Задачі

2.18. В деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 7$ електричне зміщення має значення D = 14 нКл/м^2. Визначити поляризованість P діелектрика в цій точці.

2.19. Всередині діелектрика відомі його поляризованість

$$\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$$

і напруженість поля

$$\vec{E} = a(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}) / \varepsilon_0 ,$$

де a – константа. а) Визначити густину ρ' зв'язаних зарядів і густину ρ сторонніх зарядів всередині діелектрика. б) Чому дорівнює діелектрична проникність ε матеріалу діелектрика?

2.20. Є дві безмежні паралельні площини, які заряджені з густинами заряду $+\sigma$ і $-\sigma$. Спочатку вони знаходились у вакуумі. Потім зазор між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ε. Що відбувається при цьому з : а) напруженістю $\vec{E}$ поля в зазорі, б) зміщенням $\vec{D}$, в) різницею потенціалів U між площинами?

2.21. В однорідному електричному полі з напруженістю E_0 = 100В/м розташована безмежна плоскопаралельна пластинка із однорідного і ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 2$. Пластинка розташована перпендикулярно до $\vec{E}_0$. Визначити а) напруженість поля E і електричне зміщення D всередині пластинки, б) поляризованість діелектрика P, в) поверхневу густину зв'язаних зарядів σ'.

2.22. Скляна пластинка, проникність якої ε_2 = 6, розташована в однорідному електричному полі з напруженістю E_1 = 10 В/м і розташована так, що кут α_1 між напрямком нормалі до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює 150°. Знайти напруженість E_2 поля в пластинці, кут α_2, який це поле утворює з нормаллю до пластинки, а також густину σ' зв'язаних зарядів, що виникають на поверхні пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

2.23. Плоский конденсатор, між обкладинками якого розміщена скляна пластинка ($\varepsilon = 6$) товщиною $d = 2$ мм, заряджений до напруги $U = 200$ В. Нехтуючи величиною зазору між пластинкою і обкладинками, знайти поверхневу густину σ вільних зарядів на обкладинках конденсатора, а також поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на склі.

2.24. Показати, що на межі однорідного, ізотропного діелектрика з провідником, поверхнева густина зв'язаних зарядів $\sigma' = -(\varepsilon - 1)\sigma/\varepsilon$, де ε – діелектрична проникність діелектрика, σ поверхнева густина заряду на провіднику.

2.25. Всередині кулі із однорідного ізотропного діелектрика з $\varepsilon = 5$ створене однорідне електричне поле з напруженістю $E = 100$ В/м. Знайти максимальну поверхневу густину $\sigma'_{\text{мах}}$ зв'язаних зарядів і середнє значення σ' одного знаку.

2.26. Всередині кулі із однорідного ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 7$ створене однорідне електричне поле, напруженість якого $E = 100$ В/м . Радіус кулі $R = 3$ см. Знайти повний зв'язаний заряд одного знаку.

2.27. Скляна пластинка ($\varepsilon_2 = 6$) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого $|\vec{E}| = 100$ В/м, і розташована так, що кут α між напрямком нормалі до площини пластинки і напрямком поля складає 150°. Визначити вектор поляризації скла. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

2.28. Скляна пластинка ($\varepsilon_2 = 6$) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого $|\vec{E}| = 1$кВ/м, і розташована так, що кут α між напрямком нормалі до площини пластинки і напрямком поля складає 135°. Визначити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

2.29. Скляна пластинка з проникністю ($\varepsilon_2 = 6$) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого $|\vec{E}| = 10$ В/м, і розташована так, що кут α між напрямком нормалі до поверхні пластинки і напрямком поля складає 120°. Визначити вектор електричного зміщення $\vec{D}$ в пластинці. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 2$.

2.30. Скляна пластинка з проникністю ($\varepsilon_2 = 6$) внесена в однорідне електричне поле, вектор індукції якого $|\vec{D}| = 8{,}85$ нКл/м^2, і розташована так, що кут α між напрямком нормалі до площини пластинки і вектором $\vec{D}$ складає 135°. Знайти вектор $\vec{E}$ напруженості електричного поля в пластинці. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 3$.

2.31. Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ($\varepsilon_2 = 8$) внесена в однорідне електричне поле, вектор індукції якого $\vec{D}$ складає кут $\alpha = 150^\circ$ з напрямком нормалі до поверхні пластинки. $|\vec{D}| = 17{,}6$ нКл/м^2. Визначити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

2.32. Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ($\varepsilon_2 = 8$) внесена в однорідне електричне поле і розташована так, що кут α між напрямком нормаллі до поверхні пластинки і напрямком поля складає 120°. Який кут складає вектор поляризації $\vec{P}$ із напрямком нормалі до поверхні пластинки? Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

2.33. Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика (ε_2 = 8) знаходиться в однорідному електричному полі, вектор індукції якого $\left|\vec{D}\right|$ = 35,4 нКл/м^2 і розташована так, що кут α між напрямком нормалі до поверхні пластинки і вектором $\vec{D}$ складає 150°. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 2$.

2.34. Однорідно поляризована ізотропна діелектрична пластинка (ε_2 = 8) знаходиться в повітрі. Вектор поляризації $\vec{P}$ складає кут 135° з напрямком нормалі до поверхні пластинки. $\left|\vec{P}\right|$ = 17,6 нКл/м^2. Визначити вектор напруженості електричного поля в повітрі біля пластинки.

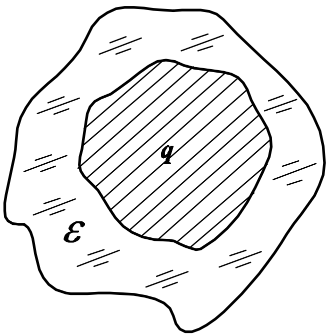


Рис. 2.23

2.35. Провідник довільної форми, який має заряд, оточений однорідним діелектриком з проникністю ε (рис. 2.23). Знайти сумарні поверхневі зв'язані заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях діелектрика.

2.36. Точковий заряд q знаходиться в центрі кулі із однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ε. Знайти поляризованість діелектрика, як функцію радіус-вектора $\vec{r}$ відносно центру системи, а також заряд q' всередині сфери, радіус якої менший радіуса кулі.

2.37. Біля точки А (рис. 2.24) на межі розділу скло – вакуум напруженість електричного поля в вакуумі E_0 = 10 В/м, причому кут

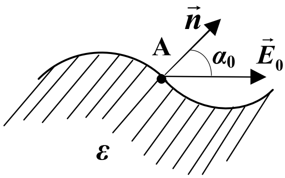


Рис. 2.24

між вектором $\vec{E}_0$ і нормаллю $\vec{n}$ до границі розділу $\alpha_0 = 30°$. Знайти напруженість E поля в склі біля точки А, кут α між вектором $\vec{E}$ і $\vec{n}$, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів в точці А.

2.38. Біля плоскої поверхні однорідного ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 7$ напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює $\vec{E}_0$ = 10 В/м, причому вектор $\vec{E}_0$ складає кут $\alpha = 60^{\circ}$ з нормаллю до поверхні діелектрика (рис. 2.25). Вважаючи поле всередині і зовні діелектрика однорідним, знайти потік вектора $\vec{E}$ через сферу, радіус якої R = 2 см, а центр О знаходиться на поверхні діелектрика.

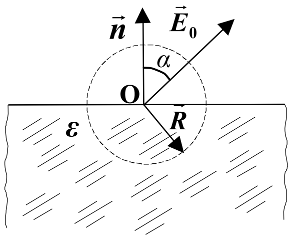


Рис. 2.25

2.39. Біля плоскої поверхні однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ε = 7 напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює E_0 = 20 В/м, причому вектор $\vec{E}_0$ складає кут $\alpha = 30^{\circ}$ з нормаллю до поверхні діелектрика (рис. 2.26.). Вважаючи поле всередині і зовні діелектрика однорідним знайти циркуляцію вектора $\vec{D}$ по контуру Γ, довжина якого ℓ = 1см. Площина контуру перпендикулярна до поверхні діелектрика і паралельна вектору $\vec{E}_0$.

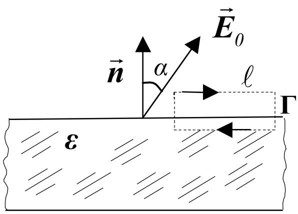


Рис. 2.26

2.40. Безмежна площина рівномірно заряджена позитивним зарядом з поверхневою густиною $\sigma = 7{,}1$ нКл/м^2. Знайти різницю потенціалів між точкою А, яка знаходиться на відстані d = 5 см від площини, і точкою В, що знаходиться на площині.

2.41. Невелика хмара із зарядом q = 20 Кл знаходиться на висоті h = 1км над поверхнею Землі. Вважаючи Землю провідником, визначити напруженість електричного поля в точці на поверхні Землі, яка знаходяться на відстані S = 3 км від місця на Землі, над яким знаходиться хмара. Кривизною поверхні Землі знехтувати.

2.42. Два точкових заряди q_1 = + 7,91 нКл і q_2 = + 2,63 нКл знаходяться на відстані d_1 = 4 см один від одного. Між ними на однакових від них відстанях розташована провідна, заземлена пластина, товщина якої d_2 = 2 см. Поверхні пластини перпендикулярні до прямої, яка з'єднує заряди.

а) Визначити силу, яка діє на пластину.

б) Як зміниться відповідь, якщо один із зарядів замінити таким же за величиною негативним зарядом?

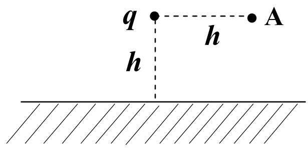


Рис. 2.27

2.43. На відстані h = 5 см від провідної безмежної площини знаходиться точковий заряд q = 10 нКл. Визначити напруженість поля в точці А (рис. 2.27), яка знаходиться на відстані h від заряду і площини.

2.44. Металічна куля, радіус якої R, з'єднана дуже тонким проводом із Землею. На відстані d = 2 R від центра цієї кулі знаходиться електричний заряд $+q$. Чому дорівнює негативний заряд Q кулі? Поверхню Землі і всі інші предмети можна вважати досить віддаленими, а впливом проводу знехтували.

2.45. Металічна куля, радіус якої R, має заряд Q. Точковий заряд q розміщений на відстані d від центра кулі (рис. 2.28). Знайти потенціал кулі.

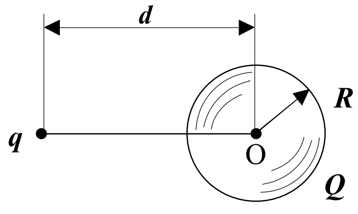


Рис. 2.28

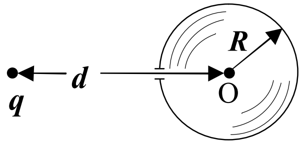


Рис. 2.29

2.46. Порожниста куля, радіус якої R, має заряд Q; в кулі є малий отвір (рис. 2.29). Як буде змінюватись потенціал кулі, якщо точковий заряд переміщувати із нескінченності через отвір всередину кулі?

2.47. Заряджений провідник знаходиться всередині замкнутої металічної оболонки.

1) Чи зміниться електричне поле всередині оболонки, якщо зовні піднести до неї заряджений провідник?

2) Чи зміниться поле зовні і всередині оболонки, якщо заряджений провідник, що знаходиться всередині оболонки, переміщувати всередині неї?

2.48. Система складається із двох концентричних провідних сфер, радіуси яких a і b . На внутрішній сфері знаходиться позитивний заряд q_1. Який заряд необхідно надати зовнішній сфері, щоб потенціал внутрішньої сфери став дорівнювати нулеві? Як буде залежати при цьому потенціал φ від відстані r до центра системи?

2.49. Із трьох – концентричних безмежно тонких металічних сфер, радіуси яких $R_1 < R_2 < R_3$ відповідно, крайні заземлені, а середній надано заряд q. Сфери знаходяться у вакуумі. Знайти напруженість електричного поля у всьому просторі.

2.50. Показати, що робота при перенесенні першого точкового заряду від однакового за величиною, але протилежного за знаком другого точкового заряду на безмежність в 4 рази більша від роботи по перенесенню першого заряду на безмежність від безмежної провідної стінки, розташованої на такій же відстані, як і другий заряд.

2.51. Точковий заряд q = 1 мкКл знаходиться на відстані ℓ = 1 см від безмежної провідної площини. Яку роботу необхідно виконати, щоб повільно видалити цей заряд на дуже велику відстань від площини?

2.52. Точковий заряд q знаходиться на відстані ℓ від провідної безмежної площини. Визначити поверхневу густину зарядів, індукованих на площині, як функцію відстані r від основи перпендикуляра, що опущений із заряду на площину.

2.53. Точковий заряд q = 5,655 мкКл знаходиться на відстані a = 3 см від заземленої металічної стінки. Знайти поверхневу густину індукованого заряду на стінці:

а) в точці, яка найближча до заряду;
б) в точці, яка знаходиться на відстані r = 5 см від заряду;
в) довести, що сумарний індукований заряд на поверхні стінки дорівнює $-q$.

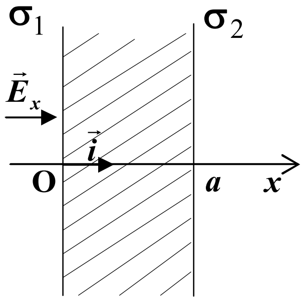


Рис.2.30

2.54. Велику металічну пластинку, товщина якої a = 0,5 см, зарядили так, що густина заряду на поверхні кожної сторони пластини дорівнює σ = 10 нКл/м^2. Потім пластинку розмістили в однорідне електричне поле, напруженість якого $\vec{E}_X = E_0\vec{i}$, де E_0 = 565 В/м, перпендикулярна площині пластини (рис. 2.30). Визначити напруженість поля $\vec{E}'$ всередині і зовні пластинки, поверхневу густину зарядів σ_1 і σ_2, яка виникне на лівій і правій сторонах пластинки.

2.55. В поле плоского конденсатора AB розмішують дві паралельні провідні пластини C і D (рис. 2.31). Відстань AC = CD = DB = d/3. Між пластинами A і B спочатку є різниця потенціалів U.
Визначити:

а) Різницю потенціалів між пластинами A і C, C і D, D і B.

б) Чи є заряди на пластинах C і D?

в) Напруженість поля між A і C, C і D, D і B.

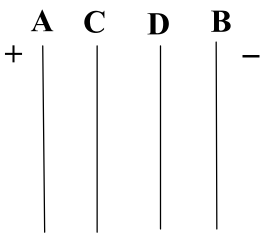


Рис. 2.31

2.56. В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві паралельні провідні пластини С і D (рис. 2.31). Відстань АС = СD = DВ = d/3. Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів U. Пластини С і D з’єднуються провідником, а потім роз’єднуються.
Визначити:

а) Різницю потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В;

б) Чи є заряди на пластинах С і D ?;

в) Напруженість поля між А і С, С і D, D і В.

2.57. Для умови задачі № 2.55 пластини D і В з’єднують провідником, а потім роз’єднують.

2.58. Для умови задачі 2.55 пластини А і D з’єднують провідником, а потім роз’єднують.

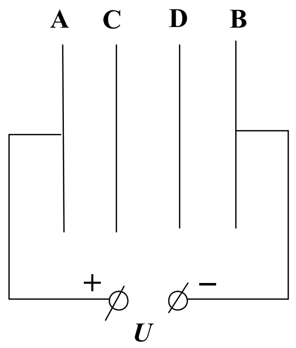


Рис. 2.32.

2.59. В поле плоского конденсатора АВ розміщують дві провідні пластини С і D, які паралельні до пластин А і В (рис.2.32). Відстані АС = СD = DВ = d/3. Між пластинами А і В підтримується різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U$. Пластини D і В з’єднують провідником, а потім роз’єднують.
Визначити:

а) Яка буде різниця потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В?

б) Чи є заряди на пластинах С і D?

в) Напруженість поля між А і С , С і D, D і В.

2.60. В поле плоского конденсатора АВ розміщують дві провідні пластини С і D , які паралельні до пластин А і В (рис.2.33). Відстані АС = СD = DВ = d/3 = 1 см. Між пластинами А і В підтримується різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U = 90$ В. Пластинки С і D з’єднуються провідником, а потім роз’єднуються. . Визначити:

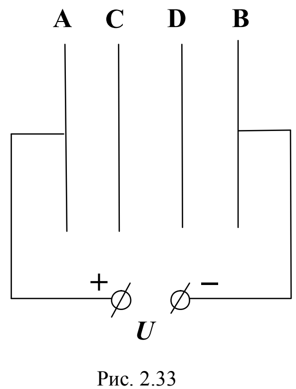


Рис. 2.33

а) Яка буде різниця потенціалів між пластинками A і C, C і D, D і B ?

б) Яка буде густина заряду на пластинах C і D?

в) Яка стане напруженість поля між пластинами A і C, C і D, D і B?

2.61. Для умови попередньої задачі пластинки A і B від'єднують від джерела напруги. Проводять маніпуляції із пластинами C і D такі як в задачі 2.60. Потім пластини A і B з'єднують провідником, а потім їх роз'єднують. Дати відповіді на запитання попередньої задачі.

2.62. В установках для очистки повітря від пилюки повітря пропускають через металічні трубки, по осі яких протягується металічний провід. Між проводом і трубою створюють сильне електричне поле, причому провід має негативний потенціал, а труба заземляється. Як будуть вести себе порошинки:

а) незаряджені?
б) заряджені негативно або позитивно? Відповідь пояснити.

2.63. Як відомо, кут розходження листочків електроскопа, який з'єднаний із зарядженим провідником, залежить від потенціалу провідника. Оцінити співвідношення між електроємностями провідника і електроскопа, щоб похибка вимірювання потенціалу провідника не перевищувала 5 %.

2.64. Показати, що формули для ємності циліндричного і сферичного конденсаторів переходять у формулу для ємності плоского конденсатора при малій різниці між радіусами внутрішньої та зовнішньої обкладок.

2.65. Плоский конденсатор складається із двох пластин, що знаходяться на відстані 0,5 мм одна від одної. Як зміниться ємність конденсатора, якщо його розмістити в ізольовану металічну коробку («екранувати»), стінки якої будуть знаходитись на відстані 0,25 мм від пластин (рис. 2.34). Спотворенням поля біля країв конденсаторів знехтувати.

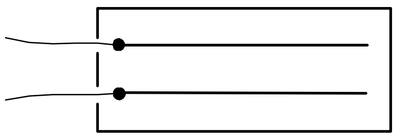


Рис. 2.34

2.66. Як зміниться ємність конденсатора (див. попередню задачу), якщо коробку з'єднати з однією із пластин конденсатора?

2.67. Яка напруженість електричного поля E в повітряному зазорі плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів між пластинами U = 200 В? Відстань між пластинами d = 0,2 см і між ними знаходиться лист скла (ε = 7), товщина якого h = 0,1 см.

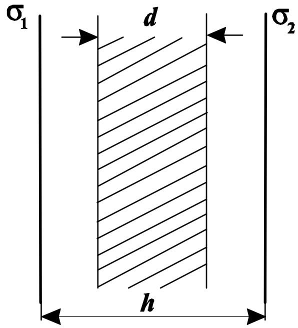


Рис. 2.35

2.68. Дві паралельні пластини дуже малої товщини заряджені однойменно, причому поверхнева густина заряду на одній пластині σ_1 = 236 нКл/м^2, а на другій σ_2 = 472 нКл/м^2. Відстань між пластинами h = 1 см мала порівняно з лінійними розмірами пластин. Між пластинами розміщена парафінова плоско – паралельна пластинка, товщина якої d = 5 мм (рис. 2.35). Діелектрична проникність парафіну ε = 2. Визначити різницю потенціалів між пластинами.

2.69. Для умови попередньої задачі визначити: 1) напруженість поля E_1 між пластинами поза діелектриком; 2) напруженість поля E_2 всередині діелектрика; 3) електричне зміщення D між пластинами поза діелектриком і всередині діелектрика; 4) поляризованість P діелектрика.

2.70. Металічне тіло розміщують між пластинами плоского повітряного зарядженого конденсатора. На поверхні тіла виникають внаслідок електризації позитивні і негативні заряди. Після цього простір між пластинами заповнюють гасом (ε = 2). Чи зміниться величина наведених на тілі зарядів у випадках:

а) заряд конденсатора залишається незмінним?

б) напруга на конденсаторі підтримується незмінною?

2.71. До пластин плоского конденсатора, відстань між якими дорівнює d = 3 см, подана різниця потенціалів U = 1000 В. Простір між пластинами заповнюється діелектриком (ε = 7). Знайти:

а) на скільки зміниться поверхнева густина заряду на пластинах при заповненні конденсатора діелектриком;

б) поверхневу густину зв'язаних (поляризаційних) зарядів.

Задачу розв'язати для двох випадків: 1) заповнення конденсатора діелектриком відбувається при включеному джерелі живлення; 2) заповнення конденсатора діелектриком відбувається при виключеному джерелі живлення.

2.72. Як зміниться різниця потенціалів між обкладинками усамітненого плоского конденсатора, якщо на одній із обкладок заряд буде збільшений у два рази?

2.73. Плоский конденсатор має ємність 600 пФ. Як зміниться ємність цього конденсатора, якщо розмістити між обкладинками паралельно їм мідний лист, товщина якого дорівнює ¼ відстані між обкладинками? Чи буде впливати на результат положення листа?

2.74. Два конденсатори, ємності яких C_1 і C_2, з'єднані послідовно і підключені до джерела з е.р.с. ε. Визначити спад напруги U_1 на конденсатор C_1 і спад напруги U_2 на конденсаторі C_2.

2.75. Металічна куля, радіус якої $R_1 = 5$ см, оточена сферичним шаром діелектрика ($\varepsilon = 7$) товщиною $d = 1$ см, що щільно прилягає до кулі. Куля разом із шаром діелектрика оточена концентрично металічною сферою із внутрішнім радіусом $R_2 = 7$ см. Визначити ємність такого конденсатора.

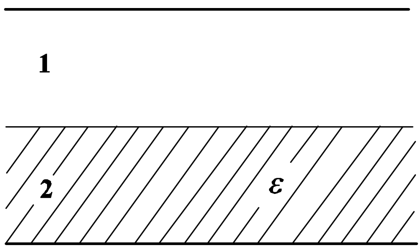


Рис. 2.36

2.76. Спочатку простір між обкладинками плоского конденсатора заповнений повітрям, а напруженість поля в зазорі E_0. Потім половину зазору, як показано на рис. 2.36 заповнили однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ε. Знайти модулі векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ в обох частинах зазору (1 і 2), якщо при заповненні діелектриком:

а) напруга між обкладками не змінювалась;
б) заряди на обкладках залишались незмінними.

2.77. Розв'язати попередню задачу з тією відмінністю, що діелектриком заповнили половину зазору, так як показано на рис. 2.37.

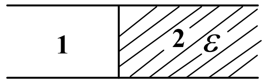


Рис. 2.37

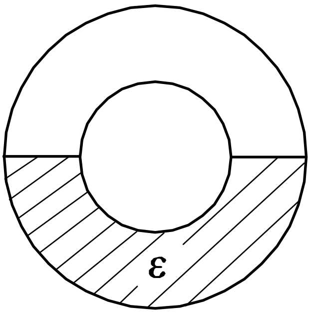


Рис. 2.38

2.78. Половину простору між двома концентричними обкладками сферичного конденсатора заповнено, як показано на рис. 2.38, однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ε. Заряд конденсатора дорівнює q. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля між обкладками як функцію відстані r від центра кривизни цих обкладок.

2.79. Повітряний циліндричний конденсатор складається із прямого проводу, діаметр якого d = 5 мм, і коаксіального з ним циліндра, діаметр якого D = 5 см. До якої різниці потенціалів U можна зарядити цей конденсатор, якщо діелектрична міцність повітря при заданих умовах дорівнює E = 30 кВ/см?

2.80. Зазор між пластинами плоского повітряного конденсатора заповнили діелектриком з діелектричною проникністю ε = 3. Як зміниться: а) заряд на пластинах; б) напруженість поля в конденсаторі; в) енергія конденсатора; г) густина енергії поля в конденсаторі? Розглянути два випадки. 1. Конденсатор весь час підключений до джерела живлення. 2. Конденсатор зарядили від джерела і тут же відключили від нього, а потім заповнили діелектриком.

2.81. Електрична проникність речовин суттєво змінюється при підвищенні температури (як правило зменшується). Допустимо, що заряджений конденсатор, який відключений від джерела зарядки, охолоджується, внаслідок чого його електрична енергія змінюється (наприклад зменшується). Куди щезає енергія конденсатора?

2.82. В кулі із однорідного ізотропного діелектрика, радіус якої R = 10 см, а проникність ε = 2, створена однорідна поляризованість $\left|\vec{P}\right|$ = 3,25 мкКл/м^2. Знайти енергію електричного поля, яка зосереджена всередині кулі.

2.83. Металева куля, радіус якої R = 3 см, заряджена зарядом q = 0,02 мкКл. Куля оточена шаром парафіну, товщина якого d = 2 см. Визначити енергію електричного поля, яке зосереджене в шарі діелектрика.

2.84. Три конденсатори, ємність яких C_1= 1 мкФ, C_2= 2 мкФ, C_3= 3 мкФ підключені до джерела живлення з напругою U = 1100 В. Визначити енергію кожного конденсатора у випадку а) послідовного і б) паралельного їх підключення.

2.85. Два конденсатори (C_1 = 600 пФ і C_2 = 1000 пФ) з'єднані послідовно. Батарею заряджають до напруги U = 20 кВ. Потім, не розряджаючи конденсатори, з'єднують їх паралельно. Визначити роботу розряду, який відбувається при такому з'єднанні.

2.86. Повітряний конденсатор заряджається до деякого потенціалу і в зарядженому стані заливається гасом (ε = 2), від чого енергія конденсатора зменшується в ε раз. Куди щезає частина енергії?

2.87. Заряджений конденсатор з'єднується паралельно з точно таким же незарядженим конденсатором. Показати, що при такому з'єднанні конденсаторів електрична енергія зменшується у два рази. Пояснити це.

2.88. Всередині плоского конденсатора, площа пластин якого S = 200 см^2 і відстань між ними d = 0,1 см, знаходиться пластина із скла (ε = 5), яка повністю заповнює простір між пластинами конденсатора. Як зміниться енергія конденсатора, якщо видалити склянку пластику? Яка механічна робота затрачується на видалення пластини. Задачу розв'язати при умові, що конденсатор весь час під'єднаний до джерела напруги U = 300 В.

2.89. Попередню задачу розв’язати при умові, що конденсатор спочатку був під’єднаний до джерела живлення, потім відключений і тільки після цього пластина була видалена.

2.90. Пластинки повітряного плоского конденсатора мають площу S = 300 см^2 і віддалені одна від одної на відстань d_1 = 3 мм. Між ними, паралельно до них, знаходиться металічна пластинка з такою ж площею і товщиною d_2 = 1 мм, яка ізольована від Землі. Конденсатор заряджають до напруги U= 600 В і від’єднують від джерела напруги. Яку роботу необхідно виконати, щоб вийняти пластину?

2.91. Задачу 2.91 розв’язати для випадку, коли замість металічної пластинки знаходиться скляна пластинка (ε = 7) тих же розмірів.

2.92. Задачу 2.91 розв’язати для випадку, коли конденсатор постійно підключений до джерела напруги.

2.93. Задачу 2.91 розв’язати для випадку, коли конденсатор постійно підключений до джерела напруги, а замість металічної пластинки знаходиться скляна пластинка (ε = 7) тих же розмірів.

2.94. Один конденсатор (C_1 = 600 пФ) зарядили до напруги U_1 = 3000 В, інший конденсатор (C_2 = 800 пФ) зарядами до напруги U_2 = 4000 В. Полюси конденсаторів, які мають протилежні знаки, з’єднали провідниками. Визначити роботу розряду конденсаторів.

2.95. Батарея із n = 5 послідовно з’єднаних конденсаторів, ємність кожного з яких C = 445 пФ підтримується при постійній напрузі U = 60 кВ. Один із конденсаторів пробивається. Визначити: а) зміну енергії батареї конденсаторів; б) роботу розряду; в) роботу джерела напруги.

2.96. Два однакових повітряних конденсатори, ємності яких однакові і дорівнюють 1 нФ заряджені до напруги U = 900 В. Один із конденсаторів в зарядженому стані занурюється в гас. Після чого конденсатори з’єднуються паралельно. Визначити роботу розряду, який при цьому відбудеться.

2.7. Відповіді.

2.18. $P = (\varepsilon - 1)D/\varepsilon = 12$ нКл/м^2.

2.19. а) $\rho' = -12a$, $\rho = 18\ a$; б) $\varepsilon = 3$.

2.20. а) зменшується в ε раз; б) не змінюється;

в) зменшується в ε раз.

2.21. а) $E = 50$ В/м, $D = 0{,}88$ нКл/м^2; б) $P = 0{,}44$ нКл/м^2;

в) $\sigma' = \pm\ 0{,}44$ нКл/м^2.

2.22. $E_2 = 5{,}2$ В/м; $\alpha_2 = 106^\circ$; $\sigma' = 64$ пКл/м^2.

2.23. $\sigma = 5{,}3$ мкКл/м^2; $\sigma' = 4{,}4$ мкКл/м^2.

2.25. $\sigma'_{мах} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3{,}5$ нКл/м^2;
$\sigma' = \sigma'_{мах}/2 = 1{,}75$ нКл/м^2.

2.26. $q' = \pi\varepsilon_0(\varepsilon - 1)R^2 E = 15$ пКл.

2.27. $P = 2{,}39$ нКл/м^2, кут між вектором $\vec{P}$ і напрямком нормалі до площини пластинки дорівнює 106°.

2.28. $\sigma' = -5{,}22$ нКл/м^2.

2.29. $\left|\vec{D}\right| = 0{,}468$ нКл/м^2,кут між вектором $\vec{D}$ і напрямком нормалі до поверхні пластинки дорівнює 101°.

2.30. $\left|\vec{E}\right| = 263$ В/м. Кут між вектором $\vec{E}$ і напрямком нормалі до поверхні пластинки дорівнює $116{,}6^\circ$.

2.31. $\sigma' = -13{,}34$ нКл/м^2.

2.32. 94°.

2.33. $\sigma' = -26{,}8$ нКл/м^2.

2.34. $\left|\vec{E}\right| = 1619$ В/м, кут між вектором $\vec{E}$ і напрямком нормалі до поверхні пластинки дорівнює 173°.

2.35. $q'_{\text{внутр.}} = -q(\varepsilon - 1/\varepsilon,\ q'_{\text{зовн.}} = q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$.

2.36. $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$; $\qquad q' = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$.

2.37. $E = 5{,}2$ В/м; $\alpha = 74^\circ$; $\sigma' = 64$ пКл/м^2.

2.38. $\Phi_E = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \pi R^2 E_0 \cos\alpha = 5{,}4$ мВм.

2.39. $\oint\limits_{\Gamma} \vec{D} d\vec{\ell} = -(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_0 \ell \sin\alpha = -5{,}3$ пКл/м.

2.40. $U = \sigma d/(2\varepsilon_0) = 20$ В.

2.41. $E = \dfrac{2qh}{4\pi\varepsilon_0 (S^2 + h^2)^{3/2}} = 11{,}4$ кВ/м.

2.42. а) $F = \dfrac{q_1^{\,2} - q_2^{\,2}}{4\pi\varepsilon_0 (d_1 - d_2)^2} = 1{,}25$ мН; б) Не зміниться.

2.43. $E = \dfrac{q\sqrt{26 - 2\sqrt{5}}}{20\pi\varepsilon_0 h^2}$ =33,4 кВ/м.

2.44. $Q = -q/2$.

2.45. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{d} + \frac{Q}{R})$.

2.46. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{R} + \frac{q}{d})$, якщо $d > R$,

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{R} + \frac{q}{R})$, якщо $d < R$.

2.47. 1) Ні. 2) Зовні ні, всередині буде змінюватись.

2.48.

$$q_2 = -\frac{b}{a}q_1,\ \varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} \frac{1 - b/a}{r} & \text{при } r \geq b, \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{a} & \text{при } a \leq r \leq b, \\ 0 & \text{при } 0 \leq r \leq a. \end{cases}$$

2.49.

$$E = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r < R_1, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)}, & \text{якщо } R_1 < r < R_2, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)}, & \text{якщо } R_2 < r < R_3, \\ 0, & \text{якщо } r > R_3. \end{cases}$$

2.51. $A = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 \ell}$ = 2,25 мДж.

2.52. $\sigma = -\dfrac{q\ell}{2\pi(\ell^2 + r^2)^{3/2}}$.

2.53. а) $\sigma = \dfrac{-q}{2\pi a^2}$ = – 1 мКл/м^2;

б) $\sigma = -\dfrac{qa}{2\pi r^3}$ = – 0,226 мКл/м^2.

2.54. $\vec{E}'$ = 0, $\sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0$ = 5 нКл/м^2,

$\sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0 = 15$ нКл/м^2,

зліва від пластинки $E' = E_0 - \sigma / \varepsilon_0$ = –564 В/м,

справа від пластинки $E'' = E_0 + \sigma / \varepsilon_0$ =1785 В/м.

2.55. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = \varphi_D - \varphi_B = U / 3$;

б) Не має;

в) $E_{AC} = E_{CD} = E_{DB} = U / d$.

2.56. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = U / 3, \varphi_C - \varphi_D = 0$;

б) C – заряджена негативно, D – заряджена позитивно, заряди такої ж величини як і на пластинах A і B;

в) $E_{AC} = E_{DB} = U / d, E_{CD} = 0$.

2.57. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = U/3; \quad \varphi_D - \varphi_B = 0;$

б) На пластині C заряду не має. На пластині D заряд негативний і за величиною дорівнює заряду на пластині A;

в) $E_{AC} = E_{CD} = U/d;\ E_{DB} = 0.$

2.58. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = 0; \qquad \varphi_D - \varphi_B = U/3;$

б) На пластині C заряду не має. На пластині D є позитивний заряд, який величиною дорівнює заряду на пластині B;

в) $E_{AC} = E_{CD} = 0;\ E_{DB} = U/d.$

2.59. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = U/2,\ \varphi_D - \varphi_B = 0;$

б) На пластині C заряду не має. Пластина D заряджена негативно і її заряд буде за величиною в 1,5 рази більший від заряду на пластині B до проведення маніпуляцій між пластинами D і B;

в) $E_{AC} = E_{CD} = 3U/2d;\ E_{DB} = 0.$

2.60. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = U/2 = 45\ \text{В};\ \varphi_C - \varphi_D = 0;$

б) На пластині C негативний заряд, на пластини D позитивний заряд, які у 3/2 рази більші величини зарядів на пластинах A і B,

$$|\sigma_C| = |\sigma_D| = 3\varepsilon_0 U/(2d) \cong 40\ \text{нКл/м}^2;$$

в) $E_{AC} = E_{DB} = 3U/(2d) = 4{,}5\ \text{кВ/м};\ E_{CD} = 0.$

2.61. а) $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = U/6 = 15$ В,

$$\varphi_C - \varphi_D = -\frac{U}{3} = -30 \text{ В};$$

б) На пластині С негативний заряд, на пластини D позитивний заряд.

$$|\sigma_C| = |\sigma_D| = \varepsilon_0 U/d \approx 26{,}6 \text{ нКл/м}^2;$$

в) $E_{AC} = E_{DB} = U/2d = 1500$ В/м;

$$E_{CD} = -U/d = -3000 \text{ В/м}.$$

2.62. Порошинки, які заряджені позитивно, і порошинки, які незаряджені, при всіх умовах будуть рухатись до проводу. Порошинки, які заряджені негативно, будуть рухатись до труби, якщо вони знаходяться далеко від проводу , і до проводу, якщо вони знаходяться ближче до проводу певної відстані.

2.63. Електроємність провідника має бути більшою від електроємності електроскопа, як мінімум в 19 раз.

2.65 Збільшиться приблизно у два рази.

2.66. Збільшиться приблизно в три рази порівняно з ємністю конденсатора без коробки.

2.67. $E = \dfrac{U\varepsilon}{(\varepsilon+1)h}$ =175 кВ/м.

2.68. $U = \dfrac{(\varepsilon+1)d\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 100$ В.

2.69. 1) E_1=13,33 кВ/м; 2) E_2=6,66 кВ/м;
3) $D_1 = D_2$=118 нКл/м^2; 4) P =59 нКл/м^2.

2.70. а) Величина наведених зарядів не зміниться.

б) Величина наведених зарядів збільшиться у 2 рази.

2.71. 1) $\Delta\sigma = \sigma' = 17{,}7$ мкКл/м^2;

2) а) $\Delta\sigma = 0$, б) $\sigma' = 2{,}53$ мкКл/м^2.

2.72. Збільшиться у 1,5 рази.

2.73. Ємність збільшиться на 200 пФ. Положення листа не впливає на результат в тому випадку, коли лист залишається паралельний обкладкам.

2.74. $U_1 = \dfrac{C_2\varepsilon}{C_2 + C_1}, U_2 = \dfrac{C_1\varepsilon}{C_2 + C_1}$.

2.75. $C = 4\pi\varepsilon_0(R_1 + d)\left(\dfrac{d}{\varepsilon R_1} + \dfrac{R_2 - R_1 - d}{R_2}\right)^{-1} = 39$ пФ.

2.76. а) $E_1 = 2\varepsilon \mathrm{E}_0/(\varepsilon + 1), E_2 = 2\mathrm{E}_0/(\varepsilon + 1)$,

$D_1 = D_2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon + 1)$;

б) $E_1 = E_0,\ E_2 = E_0/\varepsilon,\ D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$.

2.77. а) $E_1 = E_2 = E_0,\ D_1 = \varepsilon_0 E_0;\ D_2 = \varepsilon D_1$;

б) $E_1 = E_2 = 2\mathrm{E}_0/(\varepsilon + 1, D_1 = 2\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon + 1)$,
$D_2 = \varepsilon D_1$.

2.78. $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)r^2}$.

2.79. $U = \dfrac{Ed}{2}\ln\dfrac{D}{d} = 17{,}27$ кВ .

2.80. 1. а) Зросте в три рази; б) не зміниться;

в) зросте в три рази; г) зросте в три рази;

2. а) Не зміниться; б) зменшиться в три рази;

в) зменшиться в три рази; г) зменшиться в три рази.

2.82. $W = \dfrac{4\pi\varepsilon R^3 P^2}{6(\varepsilon-1)^2\varepsilon_0} =$ 5мДж.

2.83. $W = \dfrac{q^2 d}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+d)}$ = 12 мкДж.

2.84. а) W_1 =0,18, Дж, W_2 =0,09 Дж, W_3 =0,06 Дж;

б) W_1 =0,605 Дж, W_2 =1,21 Дж, W_3 =1,815 Дж.

2.85. $A = \dfrac{C_1C_2(C_1-C_2)^2U^2}{2(C_1+C_2)^3}$ =4,7 мДж.

2.86. Довести, що енергія конденсатора витрачається на поляризацію діелектрика.

2.88. $\Delta W = \dfrac{(1-\varepsilon)\varepsilon_0 SU^2}{2d}$ = – 32 мкДж;

$$A = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 SU^2}{2d} = 32 \text{ мкДж.}$$

2.89. $$\Delta W = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 SU^2}{2d} = 160 \text{ мкДж;}$$

$$A = \Delta W = 160 \text{ мкДж.}$$

2.90. $$A = \frac{\varepsilon_0 S d_2 U^2}{2(d_1 - d_2)^2} = 12 \text{ мкДж.}$$

2.91. $$A = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon\varepsilon_0 d_2 SU^2}{2(d_2 + \varepsilon(d_1 - d_2))^2} = 8{,}9 \text{ мкДж.}$$

2.92. $$A = \frac{\varepsilon_0 S d_2 U^2}{2d_1(d_1 - d_2)} = 8 \text{ мкДж.}$$

2.93. $$A = \left|\Delta W\right| = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 S d_2 U^2}{2d_1(d_2 + \varepsilon(d_1 - d_2))} = 6{,}4 \text{ мкДж.}$$

2.94. $$A = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)}(U_1 + U_2)^2 = 8{,}4 \text{ мДж.}$$

2.95. а) $$\Delta W = \frac{CU^2}{2n(n-1)} = 0{,}04 \text{ Дж;}$$

б) $A_1 = \Delta W$; в) $A_2 = 2\Delta W = 0{,}08$ Дж.

2.96. $$A = \frac{CU^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon(\varepsilon + 1)} = 67{,}5 \text{ мкДж.}$$